Matemática Avanzada

Unidad 1: Ecuaciones diferenciales lineales
Problemas resueltos. Parte I

Ingeniería en Automatización y Control Industrial
Universidad Nacional de Quilmes

26 de marzo de 2018

1. Resolver la siguiente ecuación diferencial de primer orden con coeficientes variables.
   Sugerencia: Utilizar el método propuesto en la demostración del teorema de existencia y unicidad de la solución para orden 1 (Apunte teórico, Unidad 1)

   $$tx' + x = \operatorname{sen} t$$

   (a) Buscamos la solución de la ecuación homogénea asociada:

   $$\begin{aligned} tx' + x &= 0 \\ \frac{dx}{x} &= -\frac{dt}{t} \\ \ln x &= \ln \frac{k}{t} \\ x_h(t) &= \frac{k}{t} \end{aligned}$$

   (b) Buscamos una solución particular de la ecuación no homogénea.
   Proponemos $x_p(t) = c(t)\frac{1}{t}$.
   Entonces,

   $$x_p' = c'(t)\frac{1}{t} - c(t)\frac{1}{t^2}$$

   Reemplazamos en la ecuación obteniendo:

   $$\begin{aligned} t\left(c'(t)\frac{1}{t} - c(t)\frac{1}{t^2}\right) + c(t)\frac{1}{t} &= \operatorname{sen} t \\ c'(t) = \operatorname{sen} t \Rightarrow c(t) &= -\cos t + k_1 \end{aligned}$$

   Sea $c(t_0) = c(0) = 0$. Entonces, $k_1 = 1$ con lo cual $x_p(t) = \frac{1-\cos t}{t}$.
   Todas las soluciones son

   $$\boxed{x(t) = x_h(t) + x_p(t) = \frac{k}{t} + \frac{1-\cos t}{t}}$$

2. **Base de soluciones exponenciales de la ecuación homogénea**:
   Considere la ecuación $x'' + 2x' + 2x = 0$,

(a) Halle la solución que verifica $x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$.

$$r^2 + 2r + 2 = 0 \Rightarrow r = -1 \pm i$$
$$e^{(-1\pm i)t} = e^{-t}(\cos t \pm i \operatorname{sen} t)$$

Todas las soluciones reales de la ecuación homogénea son

$$x(t) = C_1 e^{-t} \cos t + C_2 e^{-t} \operatorname{sen} t$$

Para las condiciones iniciales propuestas, $C_1 = 0, \quad C_2 = 1$.

Entonces, $\boxed{x(t) = e^{-t} \operatorname{sen} t}$

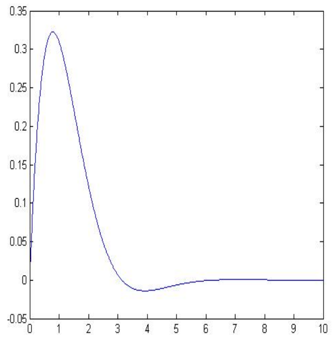
Puede resolverse la ecuación con *Matlab*, de la siguiente forma.

```
>> x = dsolve('D2x = -2*Dx-2*x', 'x(0) = 0','Dx(0)=1')

x =

exp(-t)*sin(t)
```

Se puede obtener su gráfica, que resulta



(b) Halle la solución que verifica $x(\pi) = 0, \quad x'(\pi) = 1$.

En este caso se llega a $\boxed{x(t) = -e^{\pi} e^{-t} \operatorname{sen} t}$

(c) ¿Puede hallar una solución que verifique $x(0) = 1, \quad x'(\pi) = 0$? ¿ Y $x(0) = 1, \quad x(\pi) = 0$?

Con $x(0) = 1, \quad x'(\pi) = 0$, se llega a $x(t) = e^{-t}(\cos t + \operatorname{sen} t)$.
Con $x(0) = 1, \quad x(\pi) = 0$, se llega a una contradicción $\rightarrow$ no puede hallarse una solución que verifique estas condiciones.

(d) Muestre las gráficas de cada solución obtenida.

3. Resolver y graficar $x'' + x = e\left(\frac{t}{\pi}\right), \quad x(0) = x'(0) = 0$.

La ecuación es de segundo orden y su entrada seccionalmente continua. Entonces, la solución debe ser continua, con derivada primera continua y derivada segunda seccionalmente continua.

- Para $t < 0$, $x'' + x = 0$, con $\quad x(0) = x'(0) = 0 \Rightarrow x(t) = 0$
- Para $0 < t < \pi, \quad x'' + x = 1$
  La ecuación característica es $r^2 + 1 = 0$, y las soluciones reales de la homogénea son

  $$x_h(t) = C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t$$

Proponemos una solución particular $x_p(t) = k$, y al reemplazarla en la ecuación se tiene

$$x_p(t) = 1$$

Entonces $\boxed{x_1(t) = 1 + C_1 \cos t + C_2 \operatorname{sen} t}$.

$$x_1(0) = 0, \Rightarrow C_1 = -1$$
$$x_1'(0) = 0, \Rightarrow C_2 = 0$$

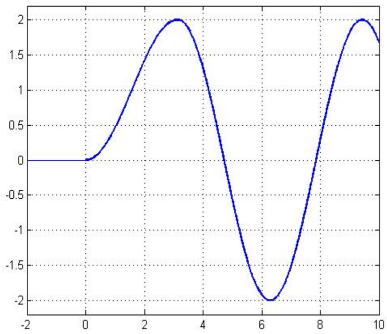
$$x_1(t) = 1 - \cos t$$

- Para $t > \pi$, $x'' + x = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_2(t) = C_3 \cos t + C_4 \operatorname{sen} t}$
  Por la condición de continuidad de la solución y su derivada, debe ser

$$x_1(\pi) = x_2(\pi)$$
$$x_1'(\pi) = x_2'(\pi)$$

Aplicando esas condiciones resulta $C_3 = -2, \quad C_4 = 0$ y $x_2(t) = -2\cos t$.

La solución de la ecuación es $\boxed{x(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - \cos t & 0 < t < \pi \\ -2\cos t & t \geq \pi \end{cases}}$



4. **Método de los coeficientes indeterminados para la ecuación no homogénea.** Hallar todas las soluciones de

$$x''' + 2x'' + x' = t \operatorname{sen} t$$

.

La ecuación característica es $r^3 + 2r^2 + r = 0$, cuyas raíces son $r = 0$ y $r = -1$ (doble). En consecuencia, todas las soluciones de la ecuación homogénea son

$$x_h = C_1 + C_2 e^{-t} + C_3 t e^{-t}$$

La ecuación puede resolverse con *Matlab* como sigue

```
>> w = dsolve('D3w +2*D2w + Dw= 0','t')

w =

C1+C2*exp(-t)+C3*exp(-t)*t
```

Para poder aplicar el método de los coeficientes indeterminados debe plantearse el problema complejo asociado al dado, cuya entrada es la exponencial e^{it}.

La ecuación en variable compleja puede escribirse $X''' + 2X'' + X' = te^{it}$, por lo cual no hay resonancia y se propone como solución particular

$$X_p = (a + bt)e^{it}$$

Las derivadas sucesivas son

$$\begin{aligned} X_p'(t) &= (b + ai + bit)e^{it} \\ X_p''(t) &= (-a + 2bi - bt)e^{it} \\ X_p'''(t) &= [-3b - i(a + bt)]e^{it} \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación se llega a

$$-2b - 2a + 4bi - 2bt = t$$

De donde igualando coeficientes miembro a miembro se obtiene

$$\begin{aligned} -2b &= 1 \\ -2b - 2a + 4bi &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, $\boxed{b = -\frac{1}{2}}$ y $\boxed{a = \frac{1}{2} - i}$

La solución particular **compleja** de la ecuación, $X_p(t)$, es

$$\begin{aligned} X_p(t) &= \left[\left(\frac{1}{2} - i\right) - \frac{1}{2}t\right] e^{it} = \left(\frac{1}{2} - i - \frac{1}{2}t\right)(\cos t + i \operatorname{sen} t) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t\right)\cos t + \operatorname{sen} t + i\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t\right)\operatorname{sen} t - \cos t\right] \end{aligned}$$

Dado que la entrada del problema **real** original es $f(t) = t \operatorname{sen} t$, debemos tomar la parte **imaginaria** de la solución compleja anterior, con lo cual

$$x_p(t) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t\right)\operatorname{sen} t - \cos t$$

Por último, todas las soluciones son $$\boxed{x(t) = C_1 + C_2 e^{-t} + C_3\, t\, e^{-t} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t\right)\operatorname{sen} t - \cos t}$$

Con *Matlab* se obtiene

```
>> w = dsolve('D3w +2*D2w + Dw= t*sin(t)','t')

w =

-C2*exp(-t)-C1*exp(-t)*t-C1*exp(-t)+1/2*sin(t)-cos(t)-1/2*t*sin(t)+C3
```

5. **Método de los coeficientes indeterminados para la ecuación no homogénea.** Hallar una solución de

$$x''' + 7x'' + 16x' + 12x = (1-t)\,e^{-2t}$$

La ecuación característica es $r^3 + 7r^2 + 16r + 12 = 0$.

Dado que se pide encontrar una solución particular, no es necesario encontrar las raíces pero sí verificar si hay o no resonancia.

Observemos que $C(-2) = C'(-2) = 0$ y $C''(-2) \neq 0$. Es decir, -2 es raíz doble de la ecuación característica.

En consecuencia, proponemos

$$x_p(t) = t^2\,(a+bt)\,e^{-2t} = (at^2 + bt^3)\,e^{-2t}$$

Obtenemos las derivadas sucesivas:

$$\begin{aligned}
x_p'(t) &= (2at + 3bt^2)e^{-2t} \;-\; 2(at^2+bt^3)e^{-2t}\\
x_p''(t) &= [2a + (6b-8a)t + (4a-12b)t^2 + 4bt^3]e^{-2t}\\
x_p'''(t) &= [6b - 8a + (8a-24b)t + 12bt^2]e^{-2t} - 2[2a + (6b-8a)t + (4a-12b)t^2 + 4bt^3]e^{-2t}
\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación se llega a

$$\begin{aligned}
6b + 2a + (8a - 24b - 12b + 16a + 42b - 56a + 32a)t + (12b - 8a + 24b + 28a - 84b + 48b - 32a + 12a)t^2 +\\
+(-8b + 28b - 32b + 12b)t^3 = 1 - t\\
6b + 2a + 6bt = 1 - t
\end{aligned}$$

De la expresión anterior, igualando coeficientes miembro a miembro se obtiene

$$\begin{aligned}
6b + 2a &= 1\\
6b &= -1
\end{aligned}$$

Entonces, $\boxed{b = -\frac{1}{6}}$ y $\boxed{a = 1}$

La solución particular es

$$\boxed{x_p(t) = t^2\left(1 - \frac{1}{6}t\right)e^{-2t}}$$

6. **Método de los coeficientes indeterminados para la ecuación no homogénea.** Hallar una solución real de

$$x^{iv} - x = 1$$

que verifica $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$.

La ecuación característica es $r^4 - 1 = 0$, cuyas raíces son $r = 1$, $r = -1$, $r = i$, $r = -i$. En consecuencia, todas las soluciones reales de la ecuación homogénea son

$$x_h = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \operatorname{sen} t$$

Proponemos como solución particular $x_p = k$.

Al reemplazarla en la ecuación, se obtiene $x_p = -1$.

Todas las soluciones reales de la **ecuación no homogénea** son

$$x(t) = -1 + C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \operatorname{sen} t$$

Al imponer las condiciones iniciales propuestas, se obtiene

$$\begin{aligned} x(0) &= -1 + C_1 + C_2 + C_3 = 0 \\ x'(0) &= C_1 - C_2 + C_4 = 0 \\ x''(0) &= C_1 + C_2 - C_3 = 0 \\ x'''(0) &= C_1 - C_2 - C_4 = 0 \end{aligned}$$

Debe resolverse entonces el siguiente sistema algebraico de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas:

$$\begin{aligned} &C_1 + C_2 + C_3 = 1 \\ &C_1 - C_2 + C_4 = 0 \\ &C_1 + C_2 - C_3 = 0 \\ &C_1 - C_2 - C_4 = 0 \end{aligned}$$

El sistema anterior tiene solución única dada por
$\boxed{C_1 = \frac{1}{4}}$, $\boxed{C_2 = \frac{1}{4}}$, $\boxed{C_3 = \frac{1}{2}}$ y $\boxed{C_4 = 0}$

Entonces, la solución pedida es $$\boxed{x(t) = -1 + \frac{1}{4} e^t + \frac{1}{4} e^{-t} + \frac{1}{2} \cos t}$$

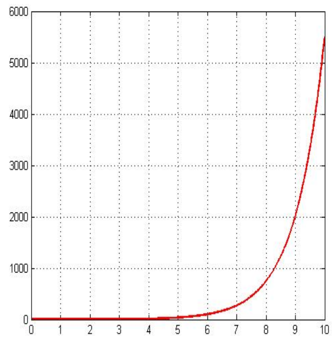
Resolviendo la ecuación con *Matlab* se obtiene

```
>> x= dsolve('D4x -x=1','x(0)=0, Dx(0)=0, D2x(0)=0, D3x(0)=0','t')

x =

-1+1/4*exp(t)+1/2*cos(t)+1/4*exp(-t)
```

Se puede obtener su gráfica, que resulta



7. **Método de los coeficientes indeterminados para la ecuación no homogénea.** Hallar todas las soluciones de

$$x'' + 4x = \cos t$$

y demostrar que todas son acotadas.

La ecuación característica es $r^2 + 4 = 0$, cuyas raíces son $r = 2i$, $r = -2i$. En consecuencia, todas las soluciones de la ecuación homogénea son

$$x_h = C_1 \cos 2t + C_2 \operatorname{sen} 2t$$

Para poder aplicar el método de los coeficientes indeterminados debe plantearse el problema complejo asociado al dado, cuya entrada es la exponencial e^{it}.

La ecuación en variable compleja puede escribirse $X'' + 4X = e^{it}$, por lo cual no hay resonancia y se propone como solución particular

$$X_p = ke^{it}$$

Las derivadas sucesivas son

$$X_p'(t) = ike^{it}$$
$$X_p''(t) = -ke^{it}$$

Reemplazando en la ecuación se llega a

$$3ke^{it} = e^{it}$$

De donde se obtiene $\boxed{k = \frac{1}{3}}$

La solución particular **compleja** de la ecuación, $X_p(t)$, es

$$X_p = \frac{1}{3}e^{it} = \frac{1}{3}(\cos t + i \operatorname{sen} t)$$

Dado que la entrada del problema **real** original es $f(t) = \cos t$, debemos tomar la parte **real** de la solución compleja anterior, con lo cual

$$x_p(t) = \frac{1}{3}\cos t$$

Por último, todas las soluciones son $\boxed{x(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \operatorname{sen} 2t + \frac{1}{3} \cos t}$

Dado que $\cos 2t$, $\operatorname{sen} 2t$ y $\cos t$ son funciones acotadas, las soluciones anteriores serán acotadas para todo valor de C_1 y C_2.

8. **Método de los coeficientes indeterminados para la ecuación no homogénea.** Hallar todas las soluciones de

$$x'' + 4x = \cos 2t$$

y demostrar que todas son no acotadas.

La ecuación característica es $r^2 + 4 = 0$, cuyas raíces son $r = 2i$, $r = -2i$. En consecuencia, todas las soluciones de la ecuación homogénea son

$$x_h = C_1 \cos 2t + C_2 \operatorname{sen} 2t$$

Para poder aplicar el método de los coeficientes indeterminados debe plantearse el problema complejo asociado al dado, cuya entrada es la exponencial e^{2it}.

La ecuación en variable compleja puede escribirse $X'' + 4X = e^{2it}$. Dado que hay resonancia ($r = 2i$ es raíz **simple** de la ecuación característica), se propone como solución particular

$$X_p = kte^{2it}$$

Las derivadas sucesivas son

$$X_p'(t) = ke^{2it} + 2ikte^{2it}$$
$$X_p''(t) = (4ki - 4kt)e^{2it}$$

Reemplazando en la ecuación se llega a

$$(4ki - 4kt)e^{2it} + 4kte^{2it} = e^{2it}$$

De donde se obtiene $k = -\frac{1}{4}i$.

La solución particular **compleja** de la ecuación, $X_p(t)$, es

$$X_p = -\frac{1}{4}ite^{2it}$$

Dado que la entrada del problema **real** original es $f(t) = \cos 2t$, debemos tomar la parte **real** de la solución compleja anterior, con lo cual

$$x_p(t) = \frac{1}{4}t \operatorname{sen} 2t$$

Por último, todas las soluciones son $\boxed{x(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \operatorname{sen} 2t + \frac{1}{4}t \operatorname{sen} 2t}$

Obsérvese que las soluciones anteriores serán no acotadas para todo valor de C_1 y C_2.