

UNIDAD 2 FUNCIONES GENERALIZADAS.

1. Idea de impulso unitario y respuesta de un sistema al impulso unitario.
Importancia para el estudio de los sistemas.
2. Noción de función generalizada. Ejemplos. Impulso unitario. Valor principal.
3. Derivada de funciones generalizadas. Reglas de cálculo. Propiedades.
4. Convolución. Cálculo y propiedades.
5. Derivada y convolución.
6. Aplicación a ecuaciones y sistemas.
7. Controlabilidad instantánea. Propiedades. Criterio PBH. Controlabilidad finita.
8. Observabilidad. Propiedades. Criterio PBH.
9. Ecuación de una salida y observabilidad.
10. Controlabilidad y observabilidad.

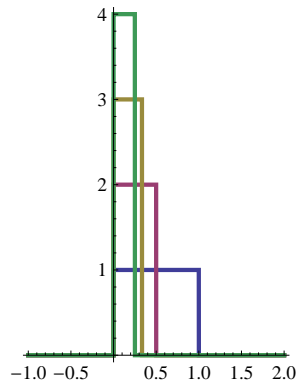
1. IMPULSO UNITARIO

Recordemos que $e(t)$ es el escalón unitario finito y $u(t)$ el escalón unitario.

Para $\epsilon > 0$ pequeño, sea $e_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon} e\left(\frac{t}{\epsilon}\right)$, que tiene altura grande $\frac{1}{\epsilon}$ es el intervalo pequeño $[0, \epsilon]$, y es nula fuera de él.

La graficamos para valores decrecientes de ϵ : $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$.

```
e[t_] := If[0 < t < 1, 1, 0]
Plot[{e[t], 2 e[2 t], 3 e[3 t], 4 e[4 t]},
 {t, -1, 2}, AspectRatio -> Automatic, PlotStyle -> {Thick}]
```



Teorema 1.1

Sea $x_\epsilon(t)$ la solución de la ecuación de orden 1 $a_0 x' + a_1 x = e_\epsilon(t)$, $x(0) = 0$. Entonces

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} x_\epsilon(t) = \frac{1}{a_0} e^{-\frac{a_1}{a_0} t} u(t).$$

Demostración

La función $\phi(t) = e^{-\frac{a_1}{a_0} t}$ es la solución de la ecuación homogénea que verifica $\phi(0) = 1$.

Como $e_\epsilon(t)$ es seccionalmente continua, la solución que buscamos $x_\epsilon(t)$ es continua con derivada s.c..

Si $t < 0$, $x_\epsilon(t)$ es solución de $a_0 x' + a_1 x = 0$, $x(0) = 0$; luego $x_\epsilon(t) = k \phi(t)$ y entonces $k = 0$.

Si $0 < t < \epsilon$, $x_\epsilon(t)$ es solución de $a_0 x' + a_1 x = \epsilon^{-1}$, $x(0) = 0$; luego $x_\epsilon(t) = (a_1 \epsilon)^{-1} (1 - \phi(t))$.

Si $\epsilon < t$, como $x_\epsilon(t)$ es solución de $a_0 x' + a_1 x = 0$, $x(\epsilon) = (a_1 \epsilon)^{-1} (1 - \phi(\epsilon))$, es $x_\epsilon(t) = (a_1 \epsilon)^{-1} (\phi(\epsilon)^{-1} - 1) \phi(t)$.

Estudiamos el límite.

Para $t < 0$, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} x_\epsilon(t) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Para } t > 0 \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} x_\epsilon(t) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (a_1 \epsilon)^{-1} (\phi(\epsilon)^{-1} - 1) \phi(t) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{a_1} \frac{e^{\frac{a_1}{a_0} \epsilon} - 1}{\epsilon} \phi(t) = \frac{1}{a_0} \phi(t) \end{aligned}$$

q.e.d.

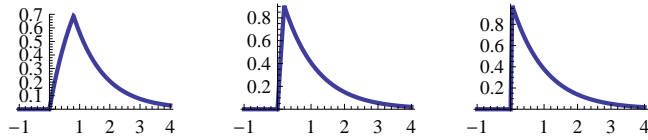
Mostramos este acercamiento en forma gráfica.

Su aspecto, para una ecuación estable, y valores decrecientes de ϵ , es el siguiente:

```

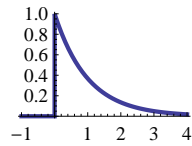
x[t_, ε_] := Which[t < 0, 0, 0 < t < ε, e-1 (1 - e-t), ε < t, e-1 (eε - 1) e-t]
g1 = Plot[x[t, 0.8], {t, -1, 4}, PlotStyle -> {Thick}];
g2 = Plot[x[t, 0.2], {t, -1, 4}, PlotStyle -> {Thick}];
g3 = Plot[x[t, 0.05], {t, -1, 4}, PlotStyle -> {Thick}];
GraphicsGrid[{{g1, g2, g3}}]

```



El último gráfico es casi el del límite.

```
x[t_] := If[t < 0, 0, e^-t]
g1 = Plot[x[t], {t, -1, 4}, PlotStyle -> {Thick}]
```



El $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} e_\epsilon(t) = \delta(t)$ se llama **impulso unitario**.

Se lo llama unitario pues $e_\epsilon(t) \geq 1$ y $\int_{-\infty}^{\infty} e_\epsilon(t) dt = 1$. Observemos que $\delta(t)$ no es una función.

Se la puede pensar como una acción externa sobre los sistemas que es de corta duración y gran intensidad.

La función $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} x_\epsilon(t) = \frac{1}{a_0} e^{-\frac{a_1}{a_0} t} u(t) = h(t)$ se llama **respuesta al impulso unitario del sistema con condición inicial nula**,

Dado que el sistema está inicialmente en reposo y la acción comienza en tiempo 0, la reacción $h(t)$ es consecuencia neta del impulso unitario. Es una función con derivada s.c. pero no es continua en 0.

Veamos algunos ejemplos ilustrativos

Situación 1

Un circuito en serie tiene una resistencia de 3Ω y un capacitor de $\frac{1}{5} F$. La entrada es un voltaje de $e_\epsilon(t)$ Volts de muy corta duración pero muy intensa. Inicialmente la carga en el capacitor es cero.

Si $q(t)$ es la carga en el capacitor, medida en Coulomb, y $q'(t) = i(t)$ es la intensidad de corriente en el circuito medida en Amperes, la ecuación es:

$$3 q' + 5 q = e_\epsilon(t), \quad q(0) = 0$$

Por el teorema anterior, el circuito reacciona, para ϵ muy pequeño, con $q(t) \approx 1/3 e^{-\frac{5}{3}t}$, en $t > 0$.

En palabras: frente al "shock" de voltaje, el capacitor adquiere instantáneamente una carga máxima de $1/3$ Coulomb y luego se descarga exponencialmente.

Situación 2

Un circuito consta de una bobina de $0.5 H$ y una resistencia en serie de 2Ω e inicialmente no hay corriente. Se introduce un voltaje de $e_\epsilon(t)$ Volts. La ecuación para la corriente $i(t)$ en el circuito es:

$$0.5 i' + 2 i = e_\epsilon(t), \quad i(0) = 0$$

Nuevamente, para ϵ muy pequeño, la corriente es $i(t) \simeq 2 e^{-4t}$ para $t > 0$.

Frente al "shock" de voltaje la corriente "salta" repentinamente de 0 a 2 Amper y luego decae a 0.

Situación 3

Una masa de 2 kg está conectada a un amortiguador de constante $5 \frac{N}{m/s}$

Se somete la masa, que está inicialmente en reposo, a la fuerza de muy corta duración pero muy intensa de $e_\epsilon(t)$ Newtons. Podemos pensar que la sometemos a una "fuerte patada" bien diseñada.

La ecuación de la velocidad de la masa es:

$$2 v' + 5 v = e_\epsilon(t), \quad v(0) = 0$$

La masa, para ϵ muy pequeño, reacciona con la velocidad $v(t) \simeq 0.5 e^{-2.5t}$ para $t > 0$ medida en m/s .

Es decir, repentinamente adquiere la velocidad $v = 0.5 m/s$ y luego retorna exponencialmente al reposo.

Situación 4

La ecuación inestable $x' - x = f(t)$, $x(0) = 0$, reacciona al impulso unitario con $h(t) = e^t u(t)$.

Sistema de segundo orden

El problema de segundo orden $a_0 x'' + a_1 x' + a_2 x = e_\epsilon(t)$, $x(0) = x'(0) = 0$, tiene una única solución $x_\epsilon(t)$, que tiene derivada continua y derivada segunda seccionalmente continua, con saltos en 0 y ϵ .

Queremos hallar el límite $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} x_\epsilon(t)$.

Para facilitar las cuentas, elegimos la base de soluciones de la ecuación homogénea $\phi_1(t)$ y $\phi_2(t)$ que verifica las condiciones iniciales $\phi_1(0) = 1$, $\phi_1'(0) = 0$, $\phi_2(0) = 0$, $\phi_2'(0) = 1$.

En $t < 0$ la función $x_\epsilon(t)$ es solución de $a_0 x'' + a_1 x' + a_2 x = 0$, $x_\epsilon(0) = x_\epsilon'(0) = 0$; por lo tanto $x_\epsilon(t) = \alpha_1 \phi_1(t) + \alpha_2 \phi_2(t)$ y, por las condiciones iniciales, resulta $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$; entonces $x_\epsilon(t) = 0$.

Para $0 < t < \epsilon$ $x_\epsilon(t)$ es solución de $a_0 x'' + a_1 x' + a_2 x = \frac{1}{\epsilon}$; luego $x_\epsilon(t) = \frac{1}{a_2 \epsilon} + \beta_1 \phi_1(t) + \beta_2 \phi_2(t)$ y como $x_\epsilon(0) = 0$ y $x_\epsilon'(0) = 0$ deducimos que $\beta_1 = -\frac{1}{a_2 \epsilon}$, $\beta_2 = 0$ y por lo tanto $x_\epsilon(t) = \frac{1}{a_2 \epsilon} [1 - \phi_1(t)]$.

Para $t > \epsilon$, $x_\epsilon(t)$ es solución de la homogénea y por lo tanto $x_\epsilon(t) = \gamma_1 \phi_1(t) + \gamma_2 \phi_2(t)$.

Como la solución es continua con derivada continua, para $t = \epsilon$, obtenemos las condiciones

$$\gamma_1 \phi_1(\epsilon) + \gamma_2 \phi_2(\epsilon) = \frac{1}{a_2 \epsilon} [1 - \phi_1(\epsilon)] \quad \text{y} \quad \gamma_1 \phi_1'(\epsilon) + \gamma_2 \phi_2'(\epsilon) = -\frac{1}{a_2 \epsilon} \phi_1'(\epsilon)$$

Resolvemos el sistema anterior usando la regla de Cramer

$$\gamma_1(\epsilon) = \frac{\det \begin{pmatrix} \frac{1}{a_2 \epsilon} [1 - \phi_1(\epsilon)] & \phi_2(\epsilon) \\ -\frac{1}{a_2 \epsilon} \phi_1'(\epsilon) & \phi_2'(\epsilon) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \phi_1(\epsilon) & \phi_2(\epsilon) \\ \phi_1'(\epsilon) & \phi_2'(\epsilon) \end{pmatrix}} \quad \text{y} \quad \gamma_2(\epsilon) = \frac{\det \begin{pmatrix} \phi_1(\epsilon) & \frac{1}{a_2 \epsilon} [1 - \phi_1(\epsilon)] \\ \phi_1'(\epsilon) & -\frac{1}{a_2 \epsilon} \phi_1'(\epsilon) \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \phi_1(\epsilon) & \phi_2(\epsilon) \\ \phi_1'(\epsilon) & \phi_2'(\epsilon) \end{pmatrix}}$$

Para $t > 0$, es $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} x_\epsilon(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [\gamma_1(\epsilon) \phi_1(t) + \gamma_2(\epsilon) \phi_2(t)] = [\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \gamma_1(\epsilon)] \phi_1(t) + [\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \gamma_2(\epsilon)] \phi_2(t)$.

Calculamos estos dos límites. Por un lado $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \det \begin{pmatrix} \phi_1(\epsilon) & \phi_2(\epsilon) \\ \phi_1'(\epsilon) & \phi_2'(\epsilon) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \phi_1(0) & \phi_2(0) \\ \phi_1'(0) & \phi_2'(0) \end{pmatrix} = 1$ y, por la

regla de L'Hôpital, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{a_2 \epsilon} [1 - \phi_1(\epsilon)] = -\frac{1}{a_2} \phi_1'(0) = 0$, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{a_2 \epsilon} \phi_1'(\epsilon) \right] = -\frac{1}{a_2} \phi_1''(0)$;

como $\phi_1(t)$ es solución de la homogénea, $a_0 \phi_1''(0) + a_1 \phi_1'(0) + a_2 \phi_1(0) = 0$, $\phi_1(0) = 1$, $\phi_1'(0) = 0$,

despejando queda $\phi_1''(0) = -\frac{a_2}{a_0}$; entonces $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{a_2 \epsilon} \phi_1'(\epsilon) \right] = -\frac{1}{a_2} \phi_1''(0) = \frac{1}{a_0}$.

Luego $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \gamma_1(\epsilon) = 0$ y $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \gamma_2(\epsilon) = \frac{1}{a_0}$ y entonces $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} x_\epsilon(t) = \frac{1}{a_0} \phi_2(t)$.

Resumiendo $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} x_\epsilon(t) = \frac{1}{a_0} \phi_2(t) u(t)$ y hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 1.2

Si $x_\epsilon(t)$ es la respuesta a $\mathcal{L}(x) = a_0 x'' + a_1 x' + a_2 x = e_\epsilon(t)$, $x(0) = x'(0) = 0$, entonces

$$h(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} x_\epsilon(t) = \frac{1}{a_0} \varphi(t) u(t)$$

donde φ es la solución de la homogénea que verifica $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$.

Observemos que $h(t)$ es continua y su derivada es seccionalmente continua con un salto en 0.

Para ϵ pequeño el sistema responde con $x_\epsilon(t) \approx h(t)$.

Mostramos este acercamiento para la ecuación $5x'' + 2x' + x = f(t)$. Calculando encontramos

$$\phi_1(t) = e^{-\frac{1}{5}t} \left(\cos \frac{2}{5}t + \frac{1}{2} \sin \frac{2}{5}t \right) \quad \text{y} \quad \phi_2(t) = \frac{5}{2} e^{-\frac{1}{5}t} \sin \frac{2}{5}t$$

Luego, la respuesta del sistema al impulso unitario es $h(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{5}t} \sin \left(\frac{2}{5}t \right) u(t)$.

Graficamos $h(t)$ y $x_\epsilon(t)$ para $\epsilon = 1, 0.5, 0.1$. En este último valor se nota la casi coincidencia entre las gráficas de las funciones: $x_{0.1}(t) \approx h(t)$.

$$\phi_1[t_] := e^{-\frac{t}{5}} \left(\cos\left[\frac{2t}{5}\right] + \frac{1}{2} \sin\left[\frac{2t}{5}\right] \right); \phi_2[t_] := \frac{5}{2} e^{-\frac{t}{5}} \sin\left[\frac{2t}{5}\right];$$

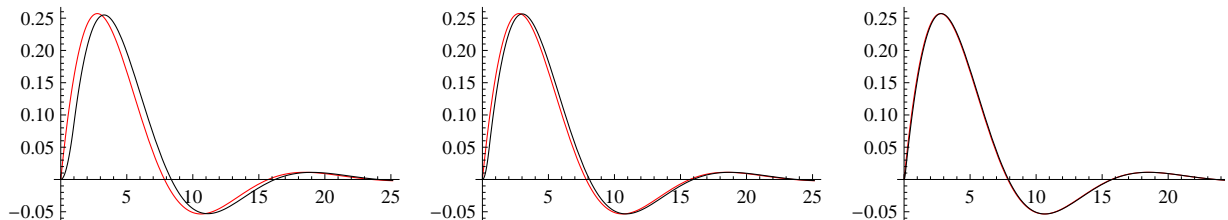
$$c_1[\epsilon_] := \frac{\text{Det}\left[\begin{pmatrix} \frac{1}{\epsilon} (1 - \phi_1[\epsilon]) & \phi_2[\epsilon] \\ -\frac{1}{\epsilon} \phi_1'[\epsilon] & \phi_2'[\epsilon] \end{pmatrix}\right]}{\text{Det}\left[\begin{pmatrix} \phi_1[\epsilon] & \phi_2[\epsilon] \\ \phi_1'[\epsilon] & \phi_2'[\epsilon] \end{pmatrix}\right]}; c_2[\epsilon_] := \frac{\text{Det}\left[\begin{pmatrix} \phi_1[\epsilon] & \frac{1}{\epsilon} (1 - \phi_1[\epsilon]) \\ \phi_1'[\epsilon] & -\frac{1}{\epsilon} \phi_1'[\epsilon] \end{pmatrix}\right]}{\text{Det}\left[\begin{pmatrix} \phi_1[\epsilon] & \phi_2[\epsilon] \\ \phi_1'[\epsilon] & \phi_2'[\epsilon] \end{pmatrix}\right]};$$

$$f[t_ , \epsilon_] := \text{Which}\left[t < 0, 0, 0 < t < \epsilon, \frac{1}{\epsilon} (1 - \phi_1[t]), \epsilon < t, c_1[\epsilon] \phi_1[t] + c_2[\epsilon] \phi_2[t]\right]$$

$$g[\epsilon_] := \text{Plot}\left[\left\{\frac{1}{5} \phi_2[t], f[t, \epsilon]\right\}, \{t, 0, 8\pi\}, \text{PlotRange} \rightarrow \text{All},\right.$$

$$\left. \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{RGBColor}[1, 0, 0], \text{RGBColor}[0, 0, 0]\}\right]$$

$$\text{GraphicsGrid}[\{\{g[1], g[0.5], g[0.1]\}\}]$$



Situación 1

Un circuito en serie consta de una bobina de 5 H, una resistencia de 2 Ω y un capacitor de 1 F.

Si está inicialmente en reposo y se lo somete a un voltaje $e_\epsilon(t)$, la ecuación que verifica la carga del capacitor $q(t)$ es: $5q'' + 2q' + q = e_\epsilon(t)$, $q(0) = q'(0) = 0$

Según el estudio anterior la carga para ϵ muy pequeño es

$$q_\epsilon(t) \approx \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{5}t} \sin\left(\frac{2}{5}t\right) u(t)$$

es decir, el capacitor se carga de manera continua.

Derivando la carga, para $t > 0$, obtenemos la corriente

$$q_\epsilon'(t) = i_\epsilon(t) \equiv \left[\frac{1}{5} \cos\left(\frac{2}{5}t\right) - \frac{1}{10} \sin\left(\frac{2}{5}t\right) \right] e^{-\frac{t}{5}} \quad \text{para } t > 0$$

Vemos que aparece repentinamente una corriente de $1/5$ Amperes.

El capacitor se va descargando en forma exponencial oscilatoria, que es una descarga natural de este sistema, y correlativamente la corriente se desvanece de manera oscilatoria.

Situación 2

Una masa de 1 kg está conectada a un resorte de constante $3 \frac{N}{m}$ y a un amortiguador de constante $4 \frac{N}{m/seg}$.

Inicialmente está en reposo y se la somete a una "patada" $e_\epsilon(t)$ de duración muy corta ϵ pero de gran intensidad ϵ^{-1} . Su movimiento está regido por $x'' + 4x' + 3x = e_\epsilon(t)$, $x(0) = x'(0) = 0$ y reacciona para $t > 0$ con

$$x_\epsilon(t) \approx \frac{1}{2} (e^{-7t} - e^{-9t}) \quad \text{y velocidad} \quad x'_\epsilon(t) \equiv \frac{1}{2} (-7e^{-7t} + 9e^{-9t}).$$

Por lo tanto, como consecuencia del impulso unitario, la masa adquiere en forma repentina una velocidad inicial $x'(0) = 1$ m/seg y luego retorna paulatinamente a la posición de equilibrio $x = 0$ con un movimiento libre del sistema.

Situación 3

En un circuito en serie LC con $C = 1/4$ F, $L = 1$ H, la corriente verifica la ecuación inestable $i'' + 4i = V(t)$. La respuesta al impulso unitario es $h(t) = \frac{1}{2} \sin(2t) u(t)$, que oscila armónicamente de manera permanente..

Ejercicio Sistema de orden n

Demuestre que la respuesta $h(t)$ al impulso unitario de $a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = f(t)$, con condiciones iniciales nulas, es $h(t) = a_0^{-1} \varphi(t) u(t)$ donde $\varphi(t)$ es la solución de la ecuación homogénea que verifica $\varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(n-2)}(0) = 0$, $\varphi^{(n-1)}(0) = 1$.

Sugerencia. Elija la base $\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)$ de la ecuación homogénea que verifica las condiciones iniciales

$$\phi_i^{(k)}(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i - 1 \\ 0 & \text{si } k \neq i - 1 \end{cases}, \quad 0 \leq k \leq n - 1,$$

e imite la demostración dada para orden 2. Observe que $\phi_n = \varphi$..

Solución de un sistema lineal no homogéneo

Destacamos dos propiedades importantes del operador lineal con coeficientes constantes

$$\mathcal{L}(x) = a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_0 x$$

"Principio de superposición"

Sea $x_i(t)$ la solución de $\mathcal{L}(x) = f_i(t)$, $t \geq t_0$, $x_i(t_0) = \dots = x_i^{(n-1)}(t_0) = 0$ para $i = 1, \dots, r$

Entonces dadas constantes c_1, \dots, c_r

$$\sum_{i=1}^r c_i x_i(t) \quad \text{es la solución de} \quad \mathcal{L}(x) = \sum_{i=1}^r c_i f_i(t), \quad x(t_0) = \dots = x^{(n-1)}(t_0) = 0$$

Dicho en palabras: suponiendo reposo inicial, la respuesta a una combinación lineal de entradas es la combinación lineal de las respuestas.

Dicho técnicamente: con condiciones iniciales nulas, la transformación $f(t) \rightarrow x(t)$ es lineal.

"Invariancia en el tiempo"

Si $x(t)$ es la solución de $\mathcal{L}(x) = f(t)$, $t \geq 0$, $x(0) = x_0, \dots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}$ entonces

$x(t-t_0)u(t-t_0)$ es la de $\mathcal{L}(x) = f(t-t_0)u(t-t_0)$, $t \geq t_0$, $x(t_0) = x_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}$

Dicho en palabras: si la entrada se retrasa, la respuesta se retrasa de igual manera.

Basándonos en estas dos propiedades, propondremos una fórmula para la solución de la ecuación no homogénea con condiciones iniciales nulas,

Teorema 1.3 Propuesta heurística

Sea el sistema $\mathcal{L}(x) = f(t)$, $t \geq 0$, $x(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0$.

Si $h(t)$ es la respuesta a $\delta(t)$, entonces $x(t) = \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau$ es la respuesta a $f(t)$ s.c..

Demostración

Dado $t > 0$ queremos obtener la respuesta $x(t)$ en el tiempo t .

Dividimos el intervalo $[0, t]$ en n intervalos $0 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_n = t$.

En el subintervalo $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ reemplazamos la función $f(\tau)$ por un escalón de altura $f(\tau_i)$:

$$f(\tau_i) \prod_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}(\tau) = f(\tau_i) (\tau_{i+1} - \tau_i) e_\epsilon(\tau - \tau_i) \quad \text{donde} \quad \epsilon = \tau_{i+1} - \tau_i$$

Por la invariancia en el tiempo y el principio de superposición la respuesta en el tiempo t , partiendo del reposo, a esta entrada, es $\approx f(\tau_i) (\tau_{i+1} - \tau_i) h(t - \tau_i)$.

Cuanto más pequeños son los subintervalos mejor es esta aproximación.

Por el principio de superposición, la respuesta en el tiempo t es la suma de las respuestas a cada una de esas entradas:

$$\sum_{i=0}^{n-1} h(t - \tau_i) f(\tau_i) (\tau_{i+1} - \tau_i) \quad \text{es la respuesta a la entrada} \quad \sum_{i=0}^{n-1} f(\tau_i) \prod_{[\tau_i, \tau_{i+1}]}(\tau)$$

Esta entrada escalonada se aproxima a la función $f(\tau)$ en $[0, t]$ cuando la longitud de los intervalos tiende a 0. Pero a su vez cuando la longitud de los subintervalos tiende a cero la respuesta anterior es una suma de Riemman para el cálculo de la integral $\int_0^t h(t - \tau) f(\tau) d\tau$.

$$\text{Luego } x(t) = \int_0^t h(t - \tau) f(\tau) d\tau$$

q.e.d.

Esto significa que la entrada $f(t)$ y la respuesta al impulso unitario $h(t)$ determinan la solución de la ecuación con condiciones iniciales nulas mediante la fórmula $x(t) = \int_0^t h(t - \tau) f(\tau) d\tau$.

Esta integral se llama convolución de h con f y se estudiará en una sección posterior.

Más adelante se dará otra demostración de la propuesta anterior.

Ejemplo 1

La respuesta al escalón unitario $u(t)$ partiendo del reposo es

$$g(t) = \int_0^t h(t - \tau) u(\tau) d\tau = \int_0^t h(t - \tau) d\tau = \int_0^t h(\mu) d\mu$$

En la integral hemos hecho el cambio de variables $\mu = t - \tau$.

Luego $g'(t) = h(t)$ y $g(0) = 0$. En palabras: $g(t)$ es la primitiva de $h(t)$ que en 0 vale 0.

Ejemplo 2

A un circuito en serie RL que está inicialmente descargado se le aplica el voltaje

$$V(t) = e^{-t} u(t). \text{ La corriente generada } i(t) \text{ verifica } L i' + R i = e^{-t} u(t), \quad i(0) = 0.$$

Como la respuesta al impulso unitario es $h(t) = \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}t} u(t)$, la corriente será

$$\text{si } R \neq L \quad i(t) = \int_0^t \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)} e^{-\tau} d\tau = \frac{1}{L-R} \left(e^{-\frac{R}{L}t} - e^{-t} \right) u(t)$$

$$\text{si } R = L \quad i(t) = \int_0^t \frac{1}{L} e^{-\frac{R}{L}(t-\tau)} e^{-\tau} d\tau = \int_0^t \frac{1}{L} e^{-t} d\tau = \frac{1}{L} t e^{-t} u(t)$$

Vemos que $i(t)$ es continua pero la derivada es seccionalmente continua con salto en 0.

Estabilidad

Un sistema se dice estable si a cada entrada acotada en $t \geq 0$ responde con salidas acotadas.

Teorema 1.4

Una ecuación lineal con coeficientes constantes $\mathcal{L}(x) = f(t)$ es estable si y sólo si es internamente estable.

Demostración

\Rightarrow) Supongamos que es estable y por lo tanto a una entrada acotada es $t \geq 0$ responde con respuestas acotadas. Sea α una raíz característica. Si $\operatorname{Re}(\alpha) > 0$, $e^{\alpha t}$ no es acotada en $t \geq 0$ y es una respuesta a la entrada acotada $f(t) = 0$, lo cual, por la hipótesis, no puede ocurrir. Si $\operatorname{Re}(\alpha) = 0$, entonces la entrada acotada $f(t) = e^{\alpha t}$ provoca resonancia en el sistema; una de las respuestas es del tipo $k t^r e^{\alpha t}$ con $r \geq 1$, que no es acotada en $t \geq 0$, lo cual no puede ser. Luego todas las raíces tienen parte real menor que cero y la ecuación es internamente estable.

\Leftarrow) Supongamos que la ecuación es internamente estable.

La respuesta al impulso unitario es $h(t) = \varphi(t) u(t)$, donde $\varphi(t)$ es una solución adecuada de la homogénea. Por ser la ecuación internamente estable, existe $a > 0$ tal que $|\varphi(t)| \leq K e^{-at}$, $t > 0$.

Luego $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt = \int_0^{\infty} |\varphi(t)| dt \leq \int_0^{\infty} K e^{-at} dt = \frac{K}{a} < +\infty$.

Sea $f(t)$ una entrada acotada en $t \geq 0$: $|f(t)| \leq M$. La salida que parte del reposo es

$$x(t) = \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

$$|x(t)| = \left| \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau \right| \leq M \int_0^t |h(t-\tau)| d\tau \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| d\tau \leq M \frac{K}{a} \quad \text{para } t \geq 0$$

Luego la salida $x(t)$ es acotada; la cota depende de la ecuación y de la cota de la entrada.

Toda salida es de la forma $x(t) + x_0(t)$ con $x_0(t)$ una solución de la homogénea.

Como $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_0(t) = 0$, $x_0(t)$ es acotada para $t \geq 0$. Luego todas las salidas son acotadas.

q.e.d.

Otra demostración de la fórmula propuesta

Se propuso heurísticamente que $x(t) = \int_0^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau$ es la solución de la ecuación con condiciones iniciales nulas. Damos otra demostración basándonos en el siguiente teorema que usa el concepto de continuidad uniforme. Abreviamos “seccionalmente continua” con s.c. .

Teorema 1.6 (Regla de Leibniz)

- a) Si $f(t)$ es s.c. y $g(t)$ es continua en $[0, \infty)$, entonces $F(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau$ es continua.
 b) Si $f(t)$ es s.c. y $g(t)$ tiene derivada continua en $[0, \infty)$, entonces $F(t)$ es derivable en cada punto de continuidad de f y la derivada es $F'(t) = \int_0^t f(\tau) g'(t-\tau) d\tau + f(t) g(0)$.

Demostración

- a) Estudiamos la continuidad de $F(t)$ en un punto a . Planteamos la fórmula del incremento

$$\begin{aligned} F(a+\Delta t) - F(a) &= \int_0^{a+\Delta t} f(\tau) g(a+\Delta t-\tau) d\tau - \int_0^a f(\tau) g(a-\tau) d\tau \\ &= \int_0^a f(\tau) [g(a+\Delta t-\tau) - g(a-\tau)] d\tau + \int_a^{a+\Delta t} f(\tau) g(a+\Delta t-\tau) d\tau \end{aligned}$$

En el intervalo $[0, a+1]$ son acotadas: $|f(\tau)| \leq M$ y $|g(\tau)| \leq M$. Como $g(\tau)$ es uniformemente continua, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|\Delta t| < \delta$ entonces para cada τ en $[0, a]$ vale $|g(a+\Delta t-\tau) - g(a-\tau)| < \epsilon$. Luego

$$\left| \int_0^a f(\tau) [g(a+\Delta t-\tau) - g(a-\tau)] d\tau \right| \leq M \epsilon \Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_0^a f(\tau) [g(a+\Delta t-\tau) - g(a-\tau)] d\tau = 0$$

$$\left| \int_a^{a+\Delta t} f(\tau) g(a+\Delta t-\tau) d\tau \right| \leq M^2 |\Delta t| \Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \int_a^{a+\Delta t} f(\tau) g(a+\Delta t-\tau) d\tau \right| = 0$$

- b) Supongamos que f es continua en el punto a ; entonces, por ser s.c., es continua en un entorno. Por el teorema del valor medio del cálculo diferencial, para algún α entre 0 y 1:

$$g(a+\Delta t-\tau) - g(a-\tau) = g'(a+\alpha\Delta t-\tau) \Delta t$$

Por ser $f(t)$ y $g(t)$ continuas en el intervalo de integración $[a, a+\Delta t]$ podemos aplicar el teorema del valor medio del cálculo integral

$$\int_a^{a+\Delta t} f(\tau) g(a+\Delta t-\tau) d\tau = f(a+\beta\Delta t) g(a+\Delta t-a-\beta\Delta t) \Delta t \quad \text{con } 0 < \beta < 1$$

Luego
$$\frac{F(a+\Delta t)-F(a)}{\Delta t} = \int_0^a f(\tau) g'(a+\alpha\Delta t-\tau) d\tau + f(a+\beta\Delta t) g'[(1-\beta)\Delta t]$$

Como $g'(t)$ es continua y $0 < \alpha < 1$, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_0^a f(\tau) g'(a+\alpha\Delta t-\tau) d\tau = \int_0^a f(\tau) g'(a-\tau) d\tau$

Como f es continua en a y $g(t)$ es continua en 0 : $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} f(a + \beta \Delta t) g[(1 - \beta) \Delta t] = f(a) g(0)$.

Luego
$$F'(a) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(a + \Delta t) - F(a)}{\Delta t} = \int_0^a f(\tau) g'(a - \tau) d\tau + f(a) g(0)$$

Esta expresión demuestra, por la parte a), que $F'(t)$ es continua en los puntos de continuidad de f .

q.e.d.

Teorema 1.7

Sean $f(t)$ continua en $[0, \infty)$ y $\varphi(t)$ la solución de

$$x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_0 x = 0, \quad \varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(n-2)}(0) = 0, \quad \varphi^{(n-1)}(0) = 1$$

Entonces $x(t) = \int_0^t f(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau$ tiene derivadas continuas hasta orden n y para $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x &= f(t) \\ x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Demostración

Por razones de claridad hacemos la demostración para una ecuación de orden 3. Entonces

$$\varphi''' + a_2 \varphi'' + a_1 \varphi' + a_0 \varphi = 0 \quad \text{y} \quad \varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \quad \varphi''(0) = 1.$$

Por el lema anterior, $x(t) = \int_0^t f(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau$ tiene derivada continua dada por

$$x'(t) = \int_0^t f(\tau) \varphi'(t - \tau) d\tau + f(t) \varphi(0) = \int_0^t f(\tau) \varphi'(t - \tau) d\tau,$$

Aplicando otra vez el lema vemos que $x'(t)$ tiene derivada continua dada por

$$x''(t) = \int_0^t f(\tau) \varphi''(t - \tau) d\tau + f(t) \varphi'(0) = \int_0^t f(\tau) \varphi''(t - \tau) d\tau$$

Por una tercera aplicación del lema vemos que $x''(t)$ tiene derivada continua dada por

$$x'''(t) = \int_0^t f(\tau) \varphi'''(t - \tau) d\tau + f(t) \varphi''(0) = \int_0^t f(\tau) \varphi'''(t - \tau) d\tau + f(t)$$

Usando que $\varphi''' + a_2 \varphi'' + a_1 \varphi' + a_0 \varphi = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned}
x''' + a_2 x'' + a_1 x' + a_0 x &= \int_0^t f(\tau) \varphi'''(t-\tau) d\tau + f(t) + a_2 \left[\int_0^t f(\tau) \varphi''(t-\tau) d\tau \right] + \\
& a_1 \left[\int_0^t f(\tau) \varphi'(t-\tau) d\tau \right] + a_0 \int_0^t f(\tau) \varphi(t-\tau) d\tau \\
&= \int_0^t f(\tau) [\varphi'''(t-\tau) + a_2 \varphi''(t-\tau) + a_1 \varphi'(t-\tau) + a_0 \varphi(t-\tau)] d\tau + f(t) = f(t)
\end{aligned}$$

Además, por las igualdades anteriores se tiene

$$x(0) = \int_0^0 f(\tau) \varphi(t-\tau) d\tau = 0, \quad x'(0) = \int_0^0 f(\tau) \varphi'(t-\tau) d\tau = 0, \quad x''(0) = \int_0^0 f(\tau) \varphi''(t-\tau) d\tau = 0$$

q.e.d.

Con la misma demostración obtenemos el siguiente.

Sea $f(t)$ seccionalmente continua en $[0, \infty)$ y sea $\varphi(t)$ la solución de la ecuación homogénea

$$x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_0 x = 0 \quad \text{tal que} \quad \varphi(0) = \varphi'(0) = \dots = \varphi^{(n-2)}(0) = 0, \quad \varphi^{(n-1)}(0) = 1$$

Entonces $x(t) = \int_0^t f(\tau) \varphi(t-\tau) d\tau$ tiene derivadas continuas hasta orden $n-1$ y $x^{(n)}(t)$ es seccionalmente continua para $t \geq 0$ y verifica en los puntos de continuidad de $f(t)$:

$$\begin{aligned}
x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x &= f(t) \\
x(0) = x'(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) &= 0
\end{aligned}$$

2. FUNCIÓN GENERALIZADA

Trataremos en lo que sigue de desarrollar un marco teórico adecuado, aunque elemental, para encuadrar la idea de impulso unitario. Destacaremos las ideas centrales sin pretender ser exhaustivos en el tratamiento de las funciones generalizadas. Estas notas pueden tomarse, entonces, como una motivación para su estudio en profundidad.

Funciones seccionalmente continuas

Una función $f(t)$ se dice seccionalmente continua en \mathbb{R} , brevemente s.c., si es continua salvo en finitos puntos $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ en los cuales existen los límites laterales finitos

$$\lim_{t \rightarrow a_i^-} f(t) = f(a_i^-), \quad \lim_{t \rightarrow a_i^+} f(t) = f(a_i^+)$$

La diferencia $f(a_i^+) - f(a_i^-)$ mide el "salto" de la función en el punto a_i en el cual puede o no estar definida. Estas funciones son acotadas e integrables en cada intervalo finito. Las combinaciones lineales de s.c. son s.c.

Si $f(t)$ es s.c., el cambio de escala en la variable $f(\alpha t)$ y el desplazamiento $f(t - \beta)$ son funciones s.c.

Ejemplos

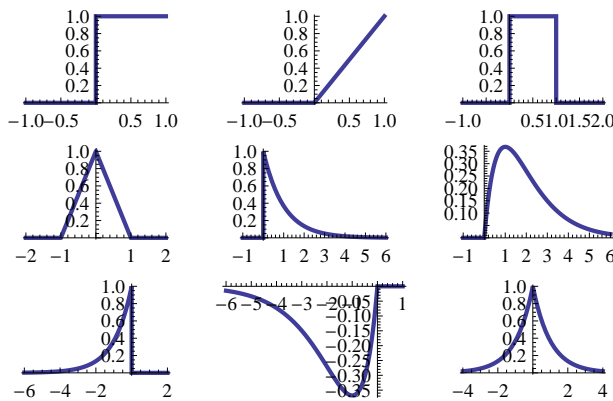
El escalón unitario desplazado $u(t - a)$ con salto $+1$ en a

Un escalón finito unitario $\Pi_{[a,b]}(t) = u(t - a) - u(t - b)$, $a < b$, con salto $+1$ en a y -1 en b .

La función signo $sg(t) = u(t) - u(-t)$ con salto $+2$ en 0 .

He aquí otros ejemplos con sus gráficas respectivas.

$u(t)$	$r(t) = t u(t)$	$e(t) = \Pi_{[0,1]}(t)$
$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - t & \text{si } -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$	$e^{-\alpha t} u(t)$	$t e^{-\alpha t} u(t)$
$e^{\alpha t} u(-t)$	$t e^{\alpha t} u(-t)$	$e^{- t }$



Una función $f(t)$ tiene derivada seccionalmente continua si tiene derivada continua salvo en finitos puntos $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, en los cuales existen los límites laterales finitos de la función y su derivada

$$f(a_i^-), f(a_i^+), f'(a_i^-), f'(a_i^+)$$

En cada subintervalo cerrado $[a_i, a_{i+1}]$ se pueden extender, de manera continua, tanto la función como su derivada, y también en los intervalos no acotados $(-\infty, a_1]$ y $[a_n, +\infty)$.

Las funciones $r(t)$, $\Lambda(t)$, $e^{-|t|}$ son continuas y tienen derivada s.c..

Las funciones $u(t)$, $e(t)$, $u(t) - 2u(t - 1) + u(t - 2)$, $e^{-t} u(t)$ son s.c. y tienen derivada s.c.

La función $\sqrt{|t|}$ es continua pero no tiene derivada s.c.

La función $\log|t|$ no es seccionalmente continua y $t \log|t|$ es continua pero no tiene derivada s.c.

La función $t \operatorname{sen} \frac{1}{t}$ es continua pero no tiene derivada s.c. La función $\operatorname{sen} \frac{1}{t}$ no es seccionalmente continua.

Ampliación

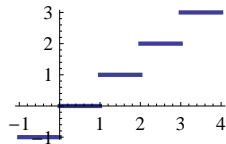
- a) Se puede definir de manera similar función seccionalmente continua en intervalos acotados o semiacotados.
- b) También podemos permitir que la cantidad de puntos de salto a_i sea infinita, siempre y cuando haya finitos en cada intervalo finito.

Ejemplo

La función parte entera: $[x] = \text{mayor entero mayor } < x$

Todos los enteros son puntos de discontinuidad con salto 1. Es una función seccionalmente derivable.

```
Plot[Floor[t], {t, -1, 4}, PlotStyle -> {Thick}]
```



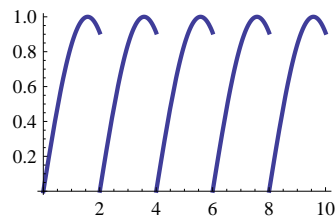
Ejemplo

Una función periódica podría tener finitos saltos en cada período.

Por ejemplo, la función con modelo $\operatorname{sen} t$, $0 < t < 2$, y de período 2, tiene saltos en los múltiplos de 2.

Es una función seccionalmente derivable.


```
Plot[ Sin[Mod[t, 2]], {t, 0, 10}, PlotStyle -> {Thick}]
```



Teorema 2.1

Si las funciones $f(t)$ y $g(t)$ son continuas y tienen derivada s.c. en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ entonces vale la fórmula de integración por partes:

$$\int_a^b f'(t) g(t) dt = f(b) g(b) - f(a) g(a) - \int_a^b f(t) g'(t) dt$$

Demostración

En cada subintervalo cerrado $[a_i, a_{i+1}]$ en que ambas funciones tienen extensión con derivada continua la fórmula es cierta y como son continuas en todo el intervalo $[a, b]$ los límites laterales en cada a_i son iguales y coinciden con el valor de la función. Luego

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(t) g(t) dt = f(a_{i+1}) g(a_{i+1}) - f(a_i) g(a_i) - \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t) g'(t) dt$$

Sumando estas igualdades obtenemos la tesis.

q.e.d.

Ejercicio

Comprobar, usando el teorema y también directamente, la igualdad

$$\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \Lambda'(t) r(t) dt = \Lambda\left(\frac{1}{2}\right) r\left(\frac{1}{2}\right) - \Lambda(-1) r(-1) - \int_{-1}^{\frac{1}{2}} \Lambda(t) r'(t) dt = -\frac{1}{8}$$

Para que la fórmula de integración por partes sea cierta, es importante que ambas funciones sean continuas como muestra el ejemplo siguiente.

Ejercicio

Si $f(t) = u(t)$, $g(t) = t + 1$, comprobar que la fórmula no es cierta en el intervalo $[-1, 1]$.

Funciones muy buenas

Una función tiene soporte compacto si es nula fuera de algún intervalo finito.

Una función se dice muy buena si tiene infinitas derivadas y es de soporte compacto.

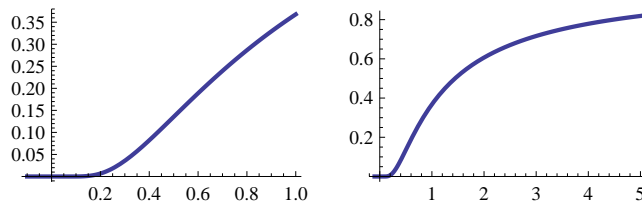
La mayoría de las funciones habituales no son muy buenas. Por ejemplo, la función $\Lambda(t)$ es continua y tiene soporte compacto, pero no es derivable.

La función $\sin t$ tiene infinitas derivadas, pero no tiene soporte compacto.

No obstante, veamos que existen muchas funciones muy buenas.

Comprobar que la función $g(t) = e^{-\frac{1}{t}} u(t)$ tiene infinitas derivadas aún en $t = 0$, donde todas las derivadas son cero. Mostramos su gráfica cerca de cero y en un intervalo más grande.

```
g[t_] := If[t > 0, e-1/t, 0]
g1 = Plot[g[t], {t, -0.1, 1}, PlotRange -> All, PlotStyle -> {Thick}];
g2 = Plot[g[t], {t, -0.1, 5}, PlotRange -> All, PlotStyle -> {Thick}];
GraphicsGrid[{{g1, g2}}
```

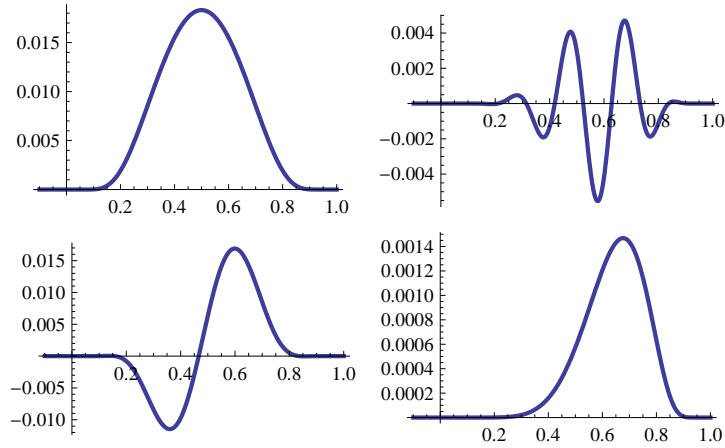


Para cada función $f(t)$ con infinitas derivadas y cada $a > 0$, la función producto $f(t) g(t) g(a-t)$ es cero fuera del intervalo $[0, a]$ y tiene infinitas derivadas. Por lo tanto es muy buena. Dibujamos algunas.

```

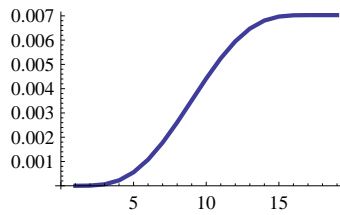
g[t_] := If[t > 0, e^{-1/t}, 0]
g1 = Plot[g[t] g[1-t], {t, -0.1, 1}, PlotRange -> All, PlotStyle -> {Thick}];
g2 = Plot[t^2 Sin[30 t] g[t] g[1-t], {t, -0.1, 1}, PlotRange -> All, PlotStyle -> {Thick}];
g3 = Plot[g[t] g[1-t] (t^4 + Cos[10 t]), {t, -0.1, 1}, PlotRange -> All, PlotStyle -> {Thick}];
g4 = Plot[g[t] g[1-t] t^5, {t, -0.1, 1}, PlotRange -> All, PlotStyle -> {Thick}];
GraphicsGrid[{{g1, g2}, {g3, g4}}]

```

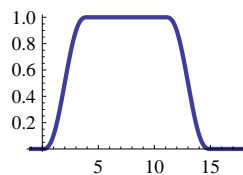


Para $\epsilon > 0$, la función $G_\epsilon(t) = \int_{-\infty}^t g(\tau) g(\epsilon - \tau) d\tau$ vale 0 si $t \leq 0$, crece en el intervalo $[0, \epsilon]$, desde el valor 0 hasta $\alpha = \int_0^\epsilon g(\tau) g(\epsilon - \tau) d\tau > 0$, y se mantiene constante α para $t \geq \epsilon$. Además tiene infinitas derivadas pues $G_\epsilon'(t) = g(t) g(\epsilon - t)$. Su gráfica es de la forma siguiente:

```
ListLinePlot [Table [Integrate [e^(-1/tau) e^(-1/(1-tau)) d tau // N, {a, 0.1, 1, 0.05}], PlotStyle -> {Thick}]
```



Para $a < b$ y $2\epsilon < b - a$, la función $K_{a,b,\epsilon}(t) = \frac{1}{\alpha^2} G_\epsilon(t - a) G_\epsilon(b - t + a)$ es muy buena, tiene soporte en $[a, b]$ y es constante 1 en $[a + \epsilon, b - \epsilon]$. Su gráfica tiene la forma de una meseta.

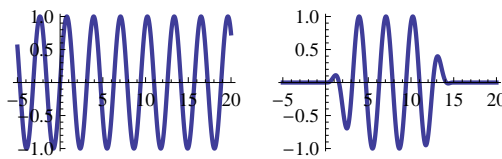


Si $f(t)$ tiene k derivadas continuas entonces $g_\epsilon(t) = f(t) K_{a,b,\epsilon}(t)$ tiene k derivadas continuas y vale 0 fuera del intervalo $[a, b]$, es igual a $f(t)$ en $[a + \epsilon, b - \epsilon]$, y si $|f(t)| \leq M$ entonces

$$\int_a^b |f(t) - g_\epsilon(t)| dt \leq \int_a^{a+\epsilon} |f(t) - g_\epsilon(t)| dt + \int_{b-\epsilon}^b |f(t) - g_\epsilon(t)| dt \leq 2M\epsilon$$

Por lo tanto, $g_\epsilon(t)$ está tan cerca, en área, como se quiera, de $f(t)$ en el intervalo $[a, b]$ eligiendo ϵ suficientemente pequeño.

Por ejemplo, la función $\sin 2t$ tiene infinitas derivadas pero no tiene soporte compacto. Multiplicada por $K_{0,15,4}(t)$ es muy buena con soporte compacto en el intervalo $[0, 15]$.



Espacios de funciones de prueba

Utilizaremos los siguientes espacios de funciones.

Las funciones con k derivadas continuas, $0 \leq k \leq \infty$, forman un espacio vectorial $\mathcal{D}^{(k)}$.

Las funciones con k derivadas continuas, $0 \leq k \leq \infty$, y soporte compacto forman un subespacio $\mathcal{D}_0^{(k)} \subset \mathcal{D}^{(k)}$.

Las funciones muy buenas forman el espacio vectorial $\mathcal{D}_0^{(\infty)}$ que es un subespacio de cada $\mathcal{D}_0^{(k)}$.

Para un intervalo abierto (a, b) , $\mathcal{D}_0^{(k)}(a, b)$ son las funciones con k derivadas continuas, $0 \leq k \leq \infty$, y soporte compacto en (a, b) .

Definición de función generalizada

Una función común opera sobre un dominio de números, es una regla que permite evaluarla en cada número del dominio y el resultado es otro número: $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ Por analogía damos la siguiente definición provisoria.

Una función generalizada es una transformación lineal $F : \mathcal{D}_0^{(\infty)} \rightarrow \mathbb{R}$.

El dominio es el espacio vectorial de las funciones muy buenas $\varphi(t)$, que se llaman “funciones de prueba”.

Es una regla que permite evaluarla en cada función de prueba $\varphi(t)$ y el resultado es un número.

Opera linealmente: $F(\varphi_1 + \varphi_2) = F(\varphi_1) + F(\varphi_2)$ y $F(\lambda \varphi) = \lambda F(\varphi)$.

Habitualmente anotaremos las funciones generalizadas mediante $F(\varphi)$ o con integrales formales

$$F(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) \varphi(t) dt$$

Este formalismo pone de relieve la linealidad de la función generalizada.

Una función generalizada puede que opere sobre un espacio vectorial más amplio que $\mathcal{D}_0^{(\infty)}$.

He aquí varios ejemplos de funciones generalizadas e indicamos el tipo de funciones de prueba más amplio a las que se pueden aplicar.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(t) \varphi(t) dt = \varphi(0) \quad \text{opera sobre funciones de prueba continuas } \mathcal{D}^{(0)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_2(t) \varphi(t) dt = -2 \varphi'(1) \quad \text{opera sobre funciones que tienen derivada continua } \mathcal{D}^{(1)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_3(t) \varphi(t) dt = \int_0^1 \varphi(t) dt \quad \text{opera sobre funciones continuas } \mathcal{D}^{(0)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_4(t) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sg}(t) \varphi'(t) dt \quad \text{actúa sobre funciones con derivada continua y soporte compacto } \mathcal{D}_0^{(1)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_5(t) \varphi(t) dt = -2 \varphi'(1) + \frac{1}{5} \varphi'''(2) \quad \text{actúa sobre funciones con tercera derivada continua } \mathcal{D}^{(3)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_6(t) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \varphi(t) dt \quad \text{actúa sobre funciones continuas con soporte compacto } \mathcal{D}_0^{(0)}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_7(t) \varphi(t) dt = \int_0^1 \varphi'(t) dt \quad \text{opera sobre funciones que tienen derivada continua } \mathcal{D}^{(1)}$$

Las funciones generalizadas se pueden combinar linealmente y forman un espacio vectorial.

Sobre la definición de función generalizada

Hemos definido función generalizada como una transformación lineal $F : \mathcal{D}_0^{(\infty)} \rightarrow \mathbb{R}$.

En esta definición omitimos la siguiente condición extra de "continuidad" que debe cumplir F :

Si $\varphi_n(t)$ es una sucesión de funciones muy buenas, que tienen soporte compacto contenido en un mismo intervalo finito, y para cada k la sucesión $\varphi_n^{(k)}(t)$ converge uniformemente a cero, entonces $F(\varphi_n) \rightarrow 0$.

La hemos omitido pues todas las funciones generalizadas que aparecen en estas notas cumplen con esta condición. Además, estas notas son de carácter elemental y tratan de mostrar algunas aplicaciones.

Definición de orden

Una función generalizada es de orden k si puede actuar sobre $\mathcal{D}_0^{(k)}$ o $\mathcal{D}^{(k)}$.

En particular, si actúa sobre funciones continuas, es de orden 0.

Por ejemplo, F_1, F_3 y F_6 son de orden 0; F_2, F_4 y F_7 son de orden 1; F_5 es de orden 3

Usando la "continuidad" se puede demostrar que toda función generalizada $F(t)$ tiene orden finito sobre cada intervalo abierto acotado (a, b) , es decir, existe $k \geq 0$ tal que $F(t)$ actúa en $\mathcal{D}_0^{(k)}(a, b)$.

Impulso unitario

Utilizando la aproximación $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} e_\epsilon(t) = \delta(t)$ damos la siguiente definición de $\delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \varphi(t) dt := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} e_\epsilon(t) \varphi(t) dt$$

El símbolo $:=$ indica que el miembro izquierdo se define con el miembro derecho.

Vamos a demostrar que este límite existe para $\varphi(t)$ continua y define una función generalizada.

Utilizando el teorema del valor medio del cálculo integral, tenemos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e_\epsilon(t) \varphi(t) dt = \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon \varphi(t) dt = \frac{1}{\epsilon} \varphi(\xi) \epsilon = \varphi(\xi) \quad \text{para algún } \xi, 0 < \xi < \epsilon.$$

Como φ es continua $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} e_\epsilon(t) \varphi(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \varphi(\xi) = \varphi(0)$

Luego

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \varphi(t) dt = \varphi(0)$$

para cada función de prueba $\varphi(t)$ continua. En particular $\delta(t)$ tiene orden 0.

De la misma manera se obtienen los resultados siguientes.

a) Traslación: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) \varphi(t) dt = \varphi(a)$ para cada φ continua.

b) Múltiplos: $\int_{-\infty}^{\infty} c \delta(t-a) \varphi(t) dt = c \varphi(a)$ para cada φ continua y cada número c .

c) Producto por funciones: si $f(t)$ es una función continua entonces $f(t) \delta(t-a)$ actúa

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(t) \delta(t-a)] \varphi(t) dt := \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) [f(t) \varphi(t)] dt = f(a) \varphi(a)$$

Luego

$$f(t) \delta(t-a) = f(a) \delta(t-a)$$

Este resultado es razonable pues, como $\delta(t-a)$ está concentrada en a , al multiplicarla por $f(t)$ sólo interesa el valor de $f(t)$ en $t=a$. La $\delta(t-a)$ queda modificada por el factor $f(a)$.

Por ejemplo: $\cos t \delta(t) = \delta(t)$ $\sin t \delta(t-\pi) = 0$ $e^t \delta(t+2) = e^{-2} \delta(t+2)$

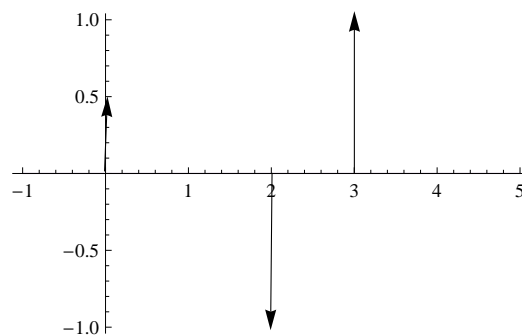
El impulso unitario también se lo conoce como “delta de Dirac”, en honor al físico inglés Paul Dirac que la introdujo hacia 1930 en sus estudios de la Mecánica cuántica.

Gráfica de impulsos unitarios

La $\delta(t-a)$ es el impulso unitario en a y se lo grafica con una flecha vertical de altura 1 en el punto a .

Un múltiplo $c \delta(t-a)$ se lo grafica con una flecha vertical de altura c en el punto a .

Mostramos la gráfica de la combinación lineal $\frac{1}{2} \delta(t) - \delta(t-2) + \delta(t-3)$



Ejercicio

Sea F definida por $\int_{-\infty}^{+\infty} F(t) \varphi(t) dt := \int_0^1 \varphi'(t) dt$ de orden 1.

Utilizando la regla de Barrow probar que $F(t) = \delta(t-1) - \delta(t)$ sobre funciones de $\mathcal{D}^{(1)}$.

Ejemplo

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-k)$ es un función generalizada de orden 0.

Funciones usuales como funciones generalizadas

Cada función $f(t)$ seccionalmente continua define una función generalizada, que anotamos F_f , que opera sobre funciones de prueba continuas con soporte compacto mediante la integral usual

$$F_f(\varphi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) dt$$

F_f es una función generalizada de orden 0.

Por ejemplo, el escalón unitario $u(t)$ define la función generalizada

$$F_u(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \varphi(t) dt = \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt$$

El escalón finito $e(t)$ define la función generalizada que opera sobre funciones continuas

$$F_e(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t) \varphi(t) dt = \int_0^1 \varphi(t) dt$$

Valor principal

La función $\frac{1}{t}$ no es seccionalmente continua y $\frac{\varphi(t)}{t}$ en general no es integrable en el origen.

Para poder incorporar esta importante función seguimos una idea de Cauchy, que consiste en evitar el origen en forma simétrica y tomar límite:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|t| > \epsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt$$

Demostremos que este límite existe para cada función de prueba con derivada continua y soporte compacto $\varphi(t)$.
En efecto

$$\int_{|t| > \epsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt = \int_{-\infty}^{-\epsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt = - \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(-t)}{t} dt + \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt = \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} dt$$

Si la función $\varphi(t)$ es derivable en 0, la regla de L'Hôpital muestra que la función $\frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t}$ es continua en 0 y además tiene soporte compacto. Luego el límite propuesto existe y vale

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|t| > \epsilon} \frac{\varphi(t)}{t} dt = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{t} dt$$

Este límite define entonces una función generalizada que se llama **valor principal** de $\frac{1}{t}$ y se anota $p.v.\left(\frac{1}{t}\right)$.

Puede actuar sobre funciones con derivada continua y soporte compacto y por ello es de orden 1.

Decimos que se ha "regularizado" la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt$ y escribimos $p.v.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t} dt$.

Definición de igualdad

Dos funciones generalizadas F_1 y F_2 se dicen iguales si dan el mismo resultado en cada función muy buena.

$$F_1 = F_2 \quad \text{si} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(t) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(t) \varphi(t) dt \quad \text{para cada } \varphi(t) \text{ de prueba.}$$

Ejemplo

La función generalizada $F(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sg}(t) \varphi'(t) dt$ es de orden 1. Observemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sg}(t) \varphi'(t) dt = -\int_{-\infty}^0 \varphi'(t) dt + \int_0^{\infty} \varphi'(t) dt = -[\varphi(t)]_{-\infty}^0 + [\varphi(t)]_0^{\infty} = -2\varphi(0)$$

Por lo tanto, actúa igual que $-2\delta(t)$ sobre cada función de prueba en $\mathcal{D}_0^{(1)}$ y entonces $F = -2\delta$.

Ejercicio

Probar que la función generalizada $F(\varphi) = \int_0^1 t \varphi'(t) dt$ coincide con $\delta(t-1) - e(t)$.

Teorema 2.1

Si dos funciones seccionalmente continuas $f_1(t)$ y $f_2(t)$ definen la misma función generalizada $F_{f_1} = F_{f_2}$, entonces son iguales $f_1(t) = f_2(t)$ en cada punto de continuidad.

Demostración.

Si $f = f_1 - f_2$ es la resta de ambas, entonces $F_f = 0$, o sea, para cada $\varphi(t)$ de prueba $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) dt = 0$.

Sea t_0 un punto de continuidad de $f(t)$.

Supongamos que $f(t_0) > 0$ entonces en un entorno $(t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ es $f(t) > 0$. Elegimos una función φ muy buena no nula, con soporte en ese entorno y $\varphi(t) \geq 0$. Entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) dt > 0$ lo cual no puede ser.

De la misma manera se prueba que no es posible $f(t_0) < 0$. Luego $f(t_0) = 0$.

q.e.d

Gracias a este resultado usamos el símbolo f en vez de F_f cuando no haya peligro de confusión.

Desplazamientos

Para una función $f(t)$, con el cambio de variable $t - a = \tau$, vale $\int_{-\infty}^{\infty} f(t - a) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \varphi(\tau + a) d\tau$.

Esta igualdad nos sugiere la siguiente definición general de desplazamiento de una función generalizada

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t - a) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) \varphi(\tau + a) d\tau$$

Ejemplos

$$i) F_f(t-a) = F_{f(t-a)}$$

$$ii) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) \varphi(\tau+a) d\tau = \varphi(a) \Rightarrow \delta(t-a) \text{ coincide con la definida previamente.}$$

$$iii) \int_{-\infty}^{\infty} p v\left(\frac{1}{t-a}\right) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} p v\left(\frac{1}{\tau}\right) \varphi(\tau+a) d\tau = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|\tau| > \epsilon} \frac{\varphi(\tau+a)}{\tau} d\tau = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|t-a| > \epsilon} \frac{\varphi(t)}{t-a} dt$$

Cambio de escala

$$\text{Para } c \text{ no nulo, haciendo el cambio de variable } ct = \tau, \text{ vale } \int_{-\infty}^{\infty} f(ct) \varphi(t) dt = \frac{1}{|c|} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \varphi\left(\frac{\tau}{c}\right) d\tau.$$

Esta igualdad nos sugiere la siguiente definición general:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(ct) \varphi(t) dt = \frac{1}{|c|} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) \varphi\left(\frac{\tau}{c}\right) d\tau$$

Ejemplos

$$i) F_f(ct) = F_{f(ct)}$$

$$ii) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(ct) \varphi(t) dt = \frac{1}{|c|} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) \varphi\left(\frac{\tau}{c}\right) d\tau = \frac{1}{|c|} \varphi(0) \Rightarrow \delta(ct) = \frac{1}{|c|} \delta(t).$$

$$\text{Coincide con } \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} e_{\epsilon}(ct) \varphi(t) dt = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{|c|} \int_{-\infty}^{\infty} e_{\epsilon}(\tau) \varphi\left(\frac{\tau}{c}\right) d\tau = \frac{1}{|c|} \varphi(0).$$

$$\text{Si } c = -1 \text{ se obtiene } \int_{-\infty}^{\infty} F(-t) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(\tau) \varphi(-\tau) d\tau$$

F se dice par si $F(-t) = F(t)$ e impar si $F(-t) = -F(t)$.

Ejemplos

$$a) \delta(t) \text{ es par y } p v\left(\frac{1}{t}\right) \text{ es impar.}$$

$$b) F_f \text{ es par si y sólo si } f \text{ es par y } F_f \text{ es impar si y sólo si } f \text{ es impar}$$

Ejercicio

a) Para cada función generalizada $F(t)$, se tiene $F(t) = F_p(t) + F_i(t)$, donde

$$F_p(t) = \frac{1}{2}[F(t) + F(-t)] \text{ es par y } F_i(t) = \frac{1}{2}[F(t) - F(-t)] \text{ es impar}$$

- b) $F(t)$ es par si y sólo si $\int_{-\infty}^{\infty} F(t) \varphi(t) dt = 0$ para cada $\varphi(t)$ impar.
 $F(t)$ es impar si y sólo si $\int_{-\infty}^{\infty} F(t) \varphi(t) dt = 0$ para cada $\varphi(t)$ par.

Aproximaciones al impulso unitario

Es notable que el impulso unitario se pueda obtener de una infinidad de maneras como límite de funciones comunes, según se muestra en el siguiente teorema.

Teorema 2.2

Sea $v(t)$ seccionalmente continua, de soporte compacto, $v(t) \geq 0$ y $\int_{-\infty}^{\infty} v(t) dt = 1$.

Sea $v_{\epsilon}(t) = \frac{1}{\epsilon} v\left(\frac{t}{\epsilon}\right)$ entonces para cada función $\varphi(t)$ continua

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} v_{\epsilon}(t) \varphi(t) dt = \varphi(0)$$

Demostración

Haciendo un cambio de variable obtenemos $\int_{-\infty}^{\infty} v_{\epsilon}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) dt = 1$.

Como $v_{\epsilon}(t)$ se anula en $|t| > \epsilon a$

$$I_{\epsilon} = \int_{-\infty}^{\infty} v_{\epsilon}(t) \varphi(t) dt = \int_{-a\epsilon}^{a\epsilon} v_{\epsilon}(t) \varphi(t) dt$$

En el intervalo $-a\epsilon \leq t \leq a\epsilon$, la función continua φ tiene un mínimo m_{ϵ} y un máximo M_{ϵ} : $m_{\epsilon} \leq \varphi(t) \leq M_{\epsilon}$, y por ser continua

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} M_{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} m_{\epsilon} = \varphi(0).$$

Además, como $v \geq 0$, se tiene $m_{\epsilon} v_{\epsilon}(t) \leq v_{\epsilon}(t) \varphi(t) \leq M_{\epsilon} v_{\epsilon}(t)$.

Integrando, se conserva la doble desigualdad, y obtenemos $m_{\epsilon} \leq I_{\epsilon} \leq M_{\epsilon}$.

Luego $\varphi(0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} m_{\epsilon} \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_{\epsilon} \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} M_{\epsilon} = \varphi(0) \Rightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_{\epsilon} = \varphi(0)$.

q.e.d.

Ejercicio

Graficar v_{ϵ} para las funciones $v(t) = e(t)$, $e\left(t + \frac{1}{2}\right)$, $\Lambda(t)$, $\Lambda\left(t + \frac{1}{2}\right)$ y $\frac{3}{4}(1-t^2) \Pi_{[-1,1]}(t)$.

Ejercicio

Para la función positiva $f(t) = \Pi_{[-1,1]}(t)$ el área bajo la curva es $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 2$.

Demostrar que para cada φ continua $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\epsilon}(t) \varphi(t) dt = 2 \varphi(0)$ o sea $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_{\epsilon}(t) = 2 \delta(t)$.

Observación

El siguiente teorema muestra que no es necesario que la función $v(t)$, considerada en el teorema anterior, sea positiva o de soporte compacto, para que se cumpla $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} v_\epsilon(t) = \delta(t)$. Basta que $v(t)$ sea una función absolutamente integrable y con integral 1: $\int_{-\infty}^{+\infty} v(t) dt = 1$. He aquí dos ejemplos de tales funciones.

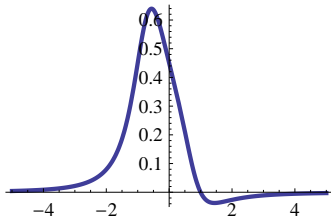
Ejemplos

- a) $f(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}$ es positiva pero no tiene soporte compacto; es integrable y tiene integral 1.
- b) $f(t) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{1-t}{t^4+1}$ no es positiva y no tiene soporte compacto pero es absolutamente integrable y su integral es 1. La graficamos.

$$\frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-t}{t^4+1} dt$$

1

`Plot` $\left[\frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{1-t}{t^4+1}, \{t, -5, 5\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{Thick}\} \right]$



Teorema 2.3 .

Sea $v(t)$ seccionalmente continua, absolutamente integrable y $\int_{-\infty}^{\infty} v(t) dt = 1$.

Si $v_{\epsilon}(t) = \frac{1}{\epsilon} v\left(\frac{t}{\epsilon}\right)$ entonces para cada función $\varphi(t)$ continua vale:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} v_{\epsilon}(t) \varphi(t) dt = \varphi(0) \quad \text{ó} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} v_{\epsilon}(t) = \delta(t)$$

Demostración

Excede los límites de estas notas.

Sea $\varphi(t)$ una función de prueba continua y por lo tanto acotada: $|\varphi(t)| \leq k$.

Haciendo el cambio de variables $t = \epsilon s$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v_{\epsilon}(t) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} v(s) \varphi(\epsilon s) ds$$

Se tiene $|v(s) \varphi(\epsilon s)| \leq k |v(s)|$ y $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} v(s) \varphi(\epsilon s) = v(s) \varphi(0)$ por ser φ continua.

En estas condiciones se demuestra (usando el teorema de la convergencia dominada) que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} v_{\epsilon}(t) \varphi(t) dt = \varphi(0) \int_{-\infty}^{+\infty} v(t) dt = \varphi(0)$$

q.e.d.

3. DERIVADA GENERALIZADA

Motivación

Si $f(t)$ es una función continua con derivada seccionalmente continua y $\varphi(t)$ tiene derivada continua y soporte compacto, integrando por partes, se tiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) \varphi(t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi'(t) dt$$

Esta fórmula permite expresar la derivada $f'(t)$ en términos de $f(t)$ usando funciones de prueba derivables. Si f es una función sin derivada, o si es una función generalizada, podemos "derivarla" haciendo uso de la expresión anterior.

Definición de derivada generalizada

Definimos la derivada de una función generalizada F operativamente mediante la fórmula

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F'(t) \varphi(t) dt := - \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) \varphi'(t) dt$$

para cada función muy buena φ .

La "derivada" F' es una función generalizada. Cada función generalizada tiene infinitas derivadas. Es claro que si F tiene orden k entonces F' tiene orden $k + 1$.

Es consistente con la derivada común pues, si f es una función continua con derivada f' s.c. entonces vale la igualdad

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi'(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) \varphi(t) dt$$

lo cual significa que

$$F_{f'} = F_f.$$

Ejemplo 1

Calculamos la derivada generalizada del escalón unitario $u(t)$ derivando F_u . Si φ es una función con derivada continua y soporte compacto, entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_u'(t) \varphi(t) dt := - \int_{-\infty}^{+\infty} F_u(t) \varphi'(t) dt = - \int_0^{+\infty} \varphi'(t) dt = -[\varphi(+\infty) - \varphi(0)] = \varphi(0)$$

Luego $F_u' = \delta$, que se suele abreviar escribiendo $u' = \delta$.

Ejemplo 2

Calculamos la derivada generalizada de la rampa $F_r : r(t) = t u(t)$.

Como $r(t)$ es continua y tiene derivada s.c. $u(t)$ se obtiene $F_r' = F_u$. ó $r' = u$.

También, utilizando la definición,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} F_r'(t) \varphi(t) dt &:= -\int_{-\infty}^{+\infty} r(t) \varphi'(t) dt = -\int_0^{+\infty} t \varphi'(t) dt \\ &= -[t \varphi(t)]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt = \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} F_u(t) \varphi(t) dt \end{aligned}$$

Ejemplo 3

Calculamos la derivada generalizada del escalón unitario finito $e(t)$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_e'(t) \varphi(t) dt := -\int_{-\infty}^{+\infty} e(t) \varphi'(t) dt = -\int_0^1 \varphi'(t) dt = -[\varphi(t)]_0^1 = \varphi(0) - \varphi(1)$$

Luego $F_e' = \delta(t) - \delta(t-1)$, ó abreviadamente, $e' = \delta(t) - \delta(t-1)$.

Ejemplo 4

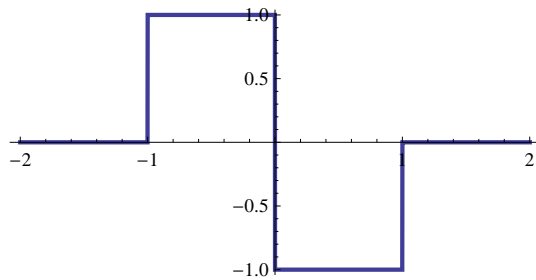
Calculamos la derivada generalizada del triángulo $\Lambda(t)$.

a) Usando la definición de derivada

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda'(t) \varphi(t) dt &:= -\int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda(t) \varphi'(t) dt = -\int_{-1}^0 (1+t) \varphi'(t) dt - \int_0^1 (1-t) \varphi'(t) dt \\ &= -\varphi(0) + \int_{-1}^0 \varphi(t) dt + \varphi(0) - \int_0^1 \varphi(t) dt = \int_{-1}^0 \varphi(t) dt - \int_0^1 \varphi(t) dt \end{aligned}$$

La acción sobre la función de prueba $\varphi(t)$ coincide con la función generalizada asociada a la función s.c. $e(t+1) - e(t-1)$. Escribimos $\Lambda'(t) = e(t+1) - e(t-1)$ cuya gráfica es la siguiente.

```
g[t_] := Which[-1 < t < 0, 1, 0 < t < 1, -1, True, 0]
Plot[g[t], {t, -2, 2}, AspectRatio -> Automatic, PlotStyle -> {Thick}]
```



b) Otra manera es observando que $\Lambda(t)$ es continua con derivada s.c. $\Lambda'(t) = e(t+1) - e(t-1)$ y por lo tanto $F_{\Lambda}' = F_{\Lambda'} = F_{e(t+1)} - F_{e(t-1)}$.

Ejemplo 5

Calculamos la derivada de la $\delta(t)$: $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t) \varphi(t) dt := - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \varphi'(t) dt = -\varphi'(0)$

Notamos que δ es de orden 0 y su derivada δ' es de orden 1.

Ejercicio

Calcular la derivada generalizada de las siguientes funciones

$$t \wedge(t), t e(t), t e(t-1), (\text{sen } t) u(t), (\text{cos } t) u(t)$$

Ejercicio

Calcular $\delta''(t)$, ..., $\delta^{(n)}(t)$.

Ejercicio

Cómo opera $u''(t) + 2u'(t) + u(t)$ sobre una función de prueba $\varphi(t)$.

Ejercicio

$\sum_{k=0}^{\infty} \delta^{(k)}(t-k)$ es un función generalizada de orden ∞ pero en cada intervalo acotado tiene orden finito. Su soporte es $[0, +\infty)$.

Reglas de derivación

Teorema 3.1

R1. $(c_1 F_1 + c_2 F_2)' = c_1 F_1' + c_2 F_2'$.

R2. $u(t-a)' = \delta(t-a)$.

R3. Si $f(t)$ es una función con derivada f' s.c. y saltos en $a_1 < \dots < a_n$ entonces

$$F_f' = F_{f'} + \sum_{i=1}^n [f(a_i^+) - f(a_i^-)] \delta(t - a_i)$$

R4. Si $f(t)$ es una función con derivada continua entonces

$$(f(t)u(t-a))' = f'(t)u(t-a) + f(a)\delta(t-a)$$

Demostración

Las reglas 1 y 2 quedan a cargo del lector.

Demostración de la Regla 3.

Sea $s(t) = \sum_{i=1}^n [f(a_i^+) - f(a_i^-)] u(t - a_i)$ la función escalonada que tiene los mismos saltos que $f(t)$. Usando las reglas 1 y 2, la derivada de $s(t)$ es

$$s'(t) = \sum_{i=1}^n [f(a_i^+) - f(a_i^-)] \delta(t - a_i).$$

La función $f_1(t) = f(t) - s(t)$ es continua con derivada s.c. $f'(t)$. Luego $F_{f_1}' = F_{f'}$.

Aplicando la linealidad a $f(t) = f_1(t) + s(t)$ se obtiene la fórmula del enunciado.

Demostrar la regla 4, directamente o mostrando que es un caso particular de la regla 3.

q.e.d.

Ejercicio

Calcular las derivadas de $2t^2 u(t + 1) - \sin t$, $t[e(t - 1) - e(t)]$ y $\cos t u(t - \pi)$.

Teorema 3.2

Si $F' = 0$ entonces $F = F_c$ con c constante.

Demostración

Para cada función de prueba $\varphi(t)$ se tiene $0 = \int_{-\infty}^{\infty} F'(t) \varphi(t) dt := - \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \varphi'(t) dt$

Elegimos una función muy buena $\theta(t)$ tal que $\int_{-\infty}^{\infty} \theta(t) dt = 1$ y sea $c = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \theta(t) dt$.

Si $\varphi(t)$ una función muy buena y $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = \alpha$, la función $\psi(t) = \int_{-\infty}^t (\varphi(\tau) - \alpha \theta(\tau)) d\tau$ tiene soporte compacto y derivada: $\psi'(t) = \varphi(t) - \alpha \theta(t)$ y por ello es una función muy buena. Luego

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} F'(t) \psi(t) dt := - \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \psi'(t) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} F(t) [\varphi(t) - \alpha \theta(t)] dt \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t) \varphi(t) dt = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \theta(t) dt = \alpha c = \int_{-\infty}^{\infty} c \varphi(t) dt \Rightarrow F = F_c$$

q.e.d.

Restricción a un abierto

Dada F , su restricción a un intervalo abierto $U \subset \mathbb{R}$ es $F_U(\varphi) := F(\varphi)$, φ con soporte compacto en U .

Si F tiene derivada nula en un intervalo abierto U , es decir, $F_U' = 0$, eligiendo la función θ en la demostración anterior con soporte en el intervalo U , y considerando funciones muy buenas con soporte compacto en U , se demuestra como en el teorema, que F_U es constante.

Teorema 3.3

Sea $f(t)$ una función seccionalmente continua. Si existe una función $g(t)$ seccionalmente continua tal que $F_f' = F_g$, entonces f es continua, tiene derivada seccionalmente continua y $f'(t) = g(t)$ en los puntos de continuidad de $g(t)$.

Demostración

Por hipótesis $-\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi'(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \varphi(t) dt$ para cada función muy buena φ .

La función $G(t) = \int_0^t g(\tau) d\tau$ es continua y $G'(t) = g(t)$ en cada punto t de continuidad de $g(t)$.

Luego $F_G' = F_g$, o sea, $-\int_{-\infty}^{\infty} G(t) \varphi'(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \varphi(t) dt$. Entonces $F_G' = F_f' \Rightarrow$

$(F_{G-f})' = 0$. Por el teorema 3.2 existe una constante c tal que $F_{G-f} = F_c$ y por el teorema 2.1

$f - G = c$. Luego $f = G + c$ es continua con derivada seccionalmente continua igual a $g(t)$ en sus puntos de continuidad.

q.e.d.

Ejemplo

Una solución de $F'(t) = \delta(t)$ es $F(t) = u(t)$ y según el teorema, todas las soluciones son $u(t) + c$.

Otra solución es $\frac{1}{2} \text{sg}(t)$ y se tiene $\frac{1}{2} \text{sg}(t) = u(t) - \frac{1}{2}$.

Ejercicio

a) Si $F'(t) = c$ constante probar que $F(t) = ct + d$

b) Si $a_0 F' + a_1 F = 0$ probar que $F(t) = k e^{-\frac{a_1}{a_0} t}$. (Ayuda: derive $e^{\frac{a_1}{a_0} t} F(t)$ y use el teorema 3.2).

c) Generalizar el resultado anterior para ecuaciones homogéneas de orden mayor:

Si $a_0 F^{(n)} + a_1 F^{(n-1)} + \dots + a_n F = 0$ entonces $F = \sum_{i=1}^s p_i(t) e^{\alpha_i t}$ es decir, las soluciones son las clásicas. Ayuda: razonar como en la demostración del teorema 1 de la unidad 1 y usar la parte b) anterior.

Ejercicio

a) Calcular la derivada segunda de $|t|$.

b) Calcular la derivada segunda de $e^t u(-t)$ y de $t e^t u(-t)$.

Ejercicio

Calcular todas las soluciones de $F^{(n)}(t) = \delta(t)$.

Determinar una solución causal F , es decir, con restricción al abierto $U = (t < 0)$ nula, y probar que es única.

Ejercicio

Sea $F'(t) = 2\delta(t+1) - t e(t)$.

a) Hallar $F(t)$.

b) ¿Cómo opera $F''(t)$ sobre una función de prueba $\varphi(t)$?

Regla 5 Derivada de un producto

Sea $G(t)$ una función generalizada de orden k y $f(t)$ es una función con k derivadas continuas. Definimos el producto $f(t)G(t)$ como la función generalizada de orden k dada por:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)G(t)] \varphi(t) dt := \int_{-\infty}^{+\infty} G(t)[f(t)\varphi(t)] dt$$

Sea $G(t)$ una función generalizada de orden k y $f(t)$ una función con $k + 1$ derivadas continuas. Entonces

$$[f(t)G(t)]' = f'(t)G(t) + f(t)G'(t)$$

Demostración

Si φ es una función de prueba, entonces por la regla usual $(f\varphi)' = f'\varphi + f\varphi'$. Luego

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)G(t)]' \varphi(t) dt &= - \int_{-\infty}^{+\infty} [G(t)f(t)] \varphi'(t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} G(t)[f(t)\varphi'(t)] dt \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} G(t)[f(t)\varphi(t)]' dt + \int_{-\infty}^{+\infty} G(t)[f'(t)\varphi(t)] dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} G'(t)[f(t)\varphi(t)] dt + \int_{-\infty}^{+\infty} [f'(t)G(t)] \varphi(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t)G'(t)] \varphi(t) dt + \int_{-\infty}^{+\infty} [f'(t)G(t)] \varphi(t) dt \end{aligned}$$

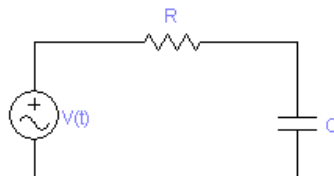
q.e.d.

Ejemplo

$$[e^{-t}u(t)]' = -e^{-t}u(t) + e^{-t}\delta(t) = -e^{-t}u(t) + \delta(t)$$

Ejemplo

Consideremos el circuito en serie RC que está inactivo en $t < 0$ y al que le colocamos una batería de 1 Volt en $t > 0$ como muestra la figura.



La corriente verifica la ecuación integral $Ri + \frac{1}{C} \int i(t) dt = V(t)$, $i(0) = 0$

Reemplazando $V(t) = u(t)$ y derivando queda $Ri' + \frac{1}{C}i = u'(t) = \delta(t)$, $i(0) = 0$.

La solución es la respuesta causal al impulso unitario: $i(t) = \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)$.

Derivada del valor principal

Por definición de derivada se tiene

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t}\right)' \varphi(t) dt := -p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi'(t)}{t} dt = - \int_0^{\infty} \frac{\varphi'(t) - \varphi'(-t)}{t} dt$$

Queremos expresar este valor en términos de $\varphi(t)$ y no de su derivada. Para ello consideramos la función $\psi(t) = \varphi(t) - 2\varphi(0) + \varphi(-t)$ que tiene un cero doble en $t = 0$, es acotada y su derivada es $\psi'(t) = \varphi'(t) - \varphi'(-t)$; por lo tanto $t^{-2}\psi(t)$ es absolutamente integrable en toda la recta; integrando por partes se tiene

$$- \int_0^{\infty} \frac{\varphi'(t) - \varphi'(-t)}{t} dt = - \int_0^{\infty} \frac{\psi'(t)}{t} dt = - \left\{ \left[\frac{\psi(t)}{t} \right]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{\psi(t)}{t^2} dt \right\} = - \int_0^{\infty} \frac{\varphi(t) - 2\varphi(0) + \varphi(-t)}{t^2} dt$$

Luego

$$p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t}\right)' \varphi(t) dt = - \int_0^{\infty} \frac{\varphi(t) - 2\varphi(0) + \varphi(-t)}{t^2} dt$$

Ejercicio

- a) Si $F(t)$ es par demostrar que $F'(t)$ es impar y si $F(t)$ es impar entonces $F'(t)$ es par.
 b) Ejemplificar a) mediante $\delta(t)$ y $p.v.\left(\frac{1}{t}\right)$.

Convergencia y derivada

Decimos que las funciones generalizadas F_{α} convergen a la función generalizada F para $\alpha \rightarrow \alpha_0$ si para cada $\varphi(t)$ de prueba se tiene

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\alpha}(t) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) \varphi(t) dt$$

Lo simbolizamos $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} F_{\alpha} = F$.

Teorema 3.4

Si $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} F_{\alpha} = F$ entonces $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} F_{\alpha}' = F'$.

Demostración

En efecto, sea φ de prueba, entonces φ' también es de prueba y se tiene:

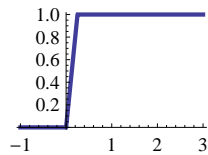
$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\alpha}'(t) \varphi(t) dt &= \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \left(- \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\alpha}(t) \varphi'(t) dt \right) \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) \varphi'(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} F'(t) \varphi(t) dt \end{aligned}$$

q.e.d.

Ejercicio

Sea $v_n(t) = n t e(n t) + u(t - n^{-1})$. He aquí su gráfica.

```
v[t_] := Which[t < 0, 0, 0 < t <  $\frac{1}{n}$ , n t,  $\frac{1}{n}$  < t, 1]
n = 4; Plot[v[t], {t, -1, 3}, PlotStyle -> {Thick}]
```



Mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = u$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n' = \delta(t)$.

Ejemplo

Mediante la aproximación $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} e_{\epsilon}(t) = \delta(t)$ obtenemos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} e_{\epsilon}'(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} (\delta(t) - \delta(t - \epsilon)) = \delta'(t).$$

Esto se puede comprobar directamente:

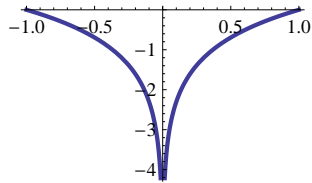
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e_{\epsilon}'(t) \varphi(t) dt = - \int_{-\infty}^{+\infty} e_{\epsilon}(t) \varphi'(t) dt = - \int_0^{\epsilon} \frac{1}{\epsilon} \varphi'(t) dt = - \frac{1}{\epsilon} [\varphi(\epsilon) - \varphi(0)] \rightarrow -\varphi'(0)$$

Estas expresiones se asemejan a la definición de un “dipolo” infinitesimal en física.

Ejercicio

La función $\log |t|$ es par e integrable en intervalos finitos. Por ejemplo, $\int_{-1}^1 \log |t| dt = -2$.

```
Plot[Log[Abs[t]], {t, -1, 1}, PlotStyle -> {Thick}]
```



Definimos la función generalizada asociada

$$\text{Log}(\varphi) := \int_{-\infty}^{\infty} \log |t| \varphi(t) dt \quad \text{para cada } \varphi \in \mathcal{D}_0^{(0)}$$

Usando que $\text{Log}(\varphi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|t| > \epsilon} \log |t| \varphi(t) dt$, probar que la derivada $\text{Log}'(t) = p v\left(\frac{1}{t}\right)$.

Respuesta al impulso unitario

Replanteamos el problema de la introducción, pero en el marco de las funciones generalizadas.

1. Sea $x_\epsilon(t)$ la respuesta a $\mathcal{L}(x) = e_\epsilon(t)$ con condiciones iniciales nulas.

Hemos demostrado en la introducción que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} x_\epsilon(t) = h(t)$ y éste es también un límite en el sentido de las de funciones generalizadas.

El operador \mathcal{L} es una combinación lineal de derivadas, entonces por el teorema 3.4, obtenemos

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} e_\epsilon(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{L}(x_\epsilon(t)) = \mathcal{L}(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} x_\epsilon(t)) = \mathcal{L}(h(t)) \Rightarrow \mathcal{L}(h(t)) = \delta(t)$$

Este confirma que las funciones generalizadas constituyen un ámbito adecuado para la resolver el problema.

Queremos mostrar también un camino alternativo para calcular la respuesta causal al impulso unitario, que será usado más adelante para analizar sistemas de ecuaciones.

2. Buscamos una función generalizada causal $X(t)$ que verifique $\mathcal{L}(X) = \delta$, es decir,

- i) para cada función de prueba φ con soporte compacto en $t < 0$, $X(\varphi) = 0$;
- y ii) para cada función de prueba φ , $\mathcal{L}(X)(\varphi) = \varphi(0)$.

Es única pues, la diferencia entre dos tales soluciones es una solución de la homogénea, y por un ejercicio consecuencia del teorema 3.3, es una solución clásica, y como su soporte está en $t \geq 0$, necesariamente es nula.

Para encontrarla, planteamos un procedimiento heurístico de búsqueda.

Como $X(t)$ debe ser nula en $t < 0$ y satisfacer la ecuación homogénea en $t > 0$ proponemos $X(t) = \phi(t) u(t)$ donde $\phi(t)$ es una solución de la ecuación homogénea: $\mathcal{L}(\phi) = 0$.

Calculamos las primeras derivadas, utilizando las reglas de derivación:

$$X'(t) = (\phi(t) u(t))' = \phi'(t) u(t) + \phi(0) \delta(t)$$

$$X''(t) = (\phi(t) u(t))'' = \phi''(t) u(t) + \phi'(0) \delta(t) + \phi(0) \delta'(t)$$

$$X'''(t) = (\phi(t) u(t))''' = \phi'''(t) u(t) + \phi''(0) \delta(t) + \phi'(0) \delta'(t) + \phi(0) \delta''(t)$$

Orden 1 Para $\mathcal{L}(x) = a_0 x' + a_1 x = \delta(t)$, $x(0) = 0$ planteamos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X(t)) &= a_0 [\phi'(t) u(t) + \phi(t) \delta(t)] + a_1 \phi(t) u(t) \\ &= [a_0 \phi'(t) + a_1 \phi(t)] u(t) + a_0 \phi(t) \delta(t) = a_0 \phi(0) \delta(t) = \delta(t) \end{aligned}$$

Para que se cumpla la última igualdad debe ser $a_0 \phi(0) = 1$ y por lo tanto $X(t) = h(t)$.

Orden 2 Para $\mathcal{L}(x) = a_0 x'' + a_1 x' + a_2 x = \delta(t)$ planteamos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X(t)) &= a_0 [\phi''(t) u(t) + \phi'(0) \delta(t) + \phi(0) \delta'(t)] + a_1 [\phi'(t) u(t) + \phi(0) \delta(t)] + a_2 [\phi(t) u(t)] \\ &= [a_0 \phi''(t) + a_1 \phi'(t) + a_2 \phi(t)] u(t) + [a_0 \phi'(0) + a_1 \phi(0)] \delta(t) + a_0 \phi(0) \delta'(t) \\ &= [a_0 \phi'(0) + a_1 \phi(0)] \delta(t) + a_0 \phi(0) \delta'(t) = \delta(t) \end{aligned}$$

Para que se cumpla la última igualdad, elegimos $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) = a_0^{-1}$, y obtenemos

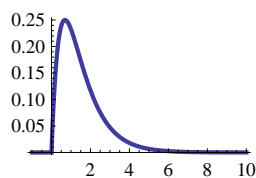
$$X(t) = \phi(t) u(t) \text{ donde } a_0 \phi''(t) + a_1 \phi'(t) + a_2 \phi(t) = 0, \phi(0) = 0, \phi'(0) = a_0^{-1}$$

que coincide con $h(t)$.

Ejemplos

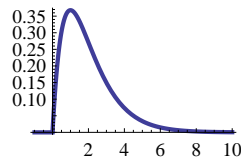
a) Para $x'' + 3x' + 2x = \delta(t)$ se tiene $h = (e^{-t} - e^{-2t}) u(t)$

`Plot[(e-t - e-2t) UnitStep[t], {t, -1, 10}, PlotStyle -> {Thick}]`



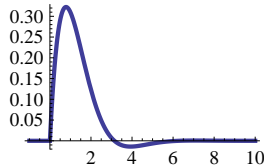
b) Para $x'' + 2x' + x = \delta(t)$ se tiene $h = t e^{-t} u(t)$

```
Plot[t e^{-t} UnitStep[t], {t, -1, 10}, PlotStyle -> {Thick}]
```



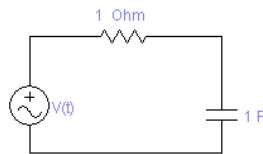
c) Para $x'' + 2x' + 2x = \delta(t)$ se tiene $h = e^{-t} \sin t u(t)$

```
Plot[e^{-t} Sin[t] UnitStep[t], {t, -1, 10}, PlotStyle -> {Thick}]
```



Ejemplo

En el circuito en serie RC de la figura, que inicialmente está inactivo, se introduce el voltaje $V(t) = t e(t)$ Volts. Hallaremos la corriente resultante por dos caminos.



a) Usando como variable el potencial v en el capacitor: $v' + v = t e(t)$, $v(0) = 0$

La solución en $0 < t < 1$ es $v(t) = -1 + t + e^{-t}$ y en $1 < t$ $v(t) = e^{-t}$

Luego $v(t) = (-1 + t + e^{-t}) e(t) + e^{-t} u(t - 1)$ es continua con derivada *s.c.*

La corriente es la derivada: $i(t) = v'(t) = (1 - e^{-t}) e(t) - e^{-t} u(t - 1)$ que tiene un salto de -1 en $t = 1$.

b) Usando como variable la corriente: $i' + i = (t e(t))' = e(t) - \delta(t - 1)$, $i(0) = 0$

Por el principio de superposición buscamos la respuesta a $e(t)$ y a $\delta(t - 1)$ con condiciones iniciales nulas.

Para $e(t)$ es $(1 - e^{-t}) e(t) + (e - 1) e^{-t} u(t - 1)$

y para $\delta(t - 1)$, por el principio de invariancia, es $h(t - 1) = e^{-(t-1)} u(t - 1)$.

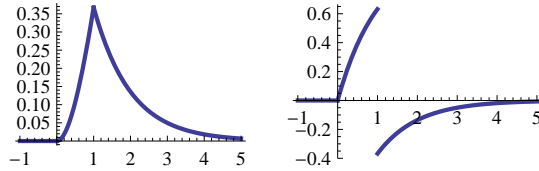
La suma es $i(t) = (1 - e^{-t}) e(t) - e^{-t} u(t - 1)$, que coincide con la hallada en a)

Graficamos las funciones $v_C(t)$ e $i(t)$ halladas.


```

g1 = Plot[(-1 + t + e^-t) (UnitStep[t] - UnitStep[t - 1]) + e^-t UnitStep[t - 1],
  {t, -1, 5}, PlotRange -> All, PlotStyle -> {Thick}];
g2 = Plot[(1 - e^-t) (UnitStep[t] - UnitStep[t - 1]) - e^-t UnitStep[t - 1],
  {t, -1, 5}, PlotRange -> All, PlotStyle -> {Thick}];
GraphicsGrid[{{g1, g2}}]

```



El primer gráfico nos muestra que el capacitor se carga en $0 \leq t \leq 1$ y luego se descarga.

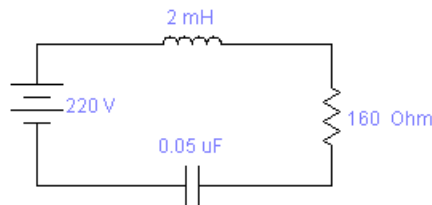
En el segundo gráfico, vemos que la corriente aumenta desde 0 A en $t = 0$ hasta 0.6 A en $t = 1$ y luego cambia de dirección desde -0.4 A y se desvanece.

Ejercicio

En el circuito anterior, se introduce el voltaje $V(t) = e(t)$ Volts . Estudie la corriente resultante si $i(0) = 0$.

Ejercicio

El circuito en serie RLC de la figura está inicialmente inactivo, y se le introduce un voltaje constante de 220 V.



Para homogeneidad dimensional, use las unidades Ohms, Amperes, Volts, Henrys, Faradios :

$$R = 160 \Omega, L = 2 \text{ mH} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ H}, C = 0.05 \mu\text{F} = 0.05 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 5 \cdot 10^{-8} \text{ F}$$

a) Muestre que la corriente generada verifica

$$2 \cdot 10^{-3} i'' + 160 i' + \frac{1}{5} \cdot 10^{-8} = 220 \delta(t), i(0) = i'(0) = 0$$

b) Encuentre la corriente generada.

$$\text{Rta. } i(t) = 1.2 e^{-40000t} \text{sen}(91651.5 t)$$

Ejercicio

Probar que la solución de $a_0 x'' + a_1 x' + a_2 x = u(t)$, $x(0) = x'(0) = 0$ es $g(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau$.

Ejercicio

Para la ecuación de tercer orden $a_0 x''' + a_1 x'' + a_2 x' + a_3 x = \delta(t)$, mostrar que $h(t) = a_0^{-1} \phi(t) u(t)$, donde $\phi(t)$ verifica $a_0 \phi''' + a_1 \phi'' + a_2 \phi' + a_3 \phi = 0$, $\phi(0) = \phi'(0) = 0$, $\phi''(0) = 1$.

4. CONVOLUCION

Dadas dos funciones $f(t)$ y $g(t)$ definimos la convolución como la función

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau) g(\tau) d\tau$$

siempre y cuando la integral sea convergente para cada valor de t .

Es conmutativa, pues haciendo el cambio de variable $t - \tau = \sigma$, queda

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau) g(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sigma) g(t - \sigma) d\sigma = (g * f)(t)$$

Si $f(t)$ y $g(t)$ valen cero para $t < 0$ entonces $(f * g)(t) = 0$ si $t < 0$ y

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau \quad \text{si } t > 0$$

La fórmula de la introducción a esta unidad tiene esta forma.

Para encontrar la convolución en t conviene seguir los pasos siguientes:

- i) se grafica $f(-\tau)$, que es la simétrica de $f(\tau)$ respecto del origen;
- ii) se la corre hasta t encontrando de esa manera $f(t - \tau)$;
- iii) se grafica $g(\tau)$;

Si la variable t va desde $-\infty$ a $+\infty$, el gráfico de $f(t - \tau)$ se mueve correlativamente, y se pueden visualizar las diversas instancias que se presentan entre las dos funciones de τ : $f(t - \tau)$ y $g(\tau)$.

Luego hay que multiplicarlas en cada instancia e integrar el producto.

Ejemplo 1

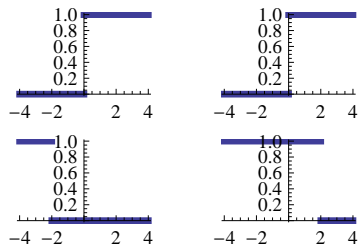
Al correr hacia la derecha el gráfico de $u(t - \tau)$ y enfrenarlo con gráfico de $u(\tau)$ se observan dos instancias:

cuando $t < 0$ es $u(t - \tau) u(\tau) = 0 \Rightarrow (u * u)(t) = 0$

cuando $t > 0$ es $u(t - \tau) u(\tau) = \prod_{[0,t]}(\tau) \Rightarrow (u * u)(t) = \int_0^t d\tau = t$

y por lo tanto $(u * u)(t) = t u(t) = r(t)$ es la rampa.

```
g1 = Plot[UnitStep[τ], {τ, -4, 4}, PlotStyle → Thickness[0.05]];
g2 = Plot[UnitStep[-2 - τ], {τ, -4, 4}, PlotStyle → Thickness[0.05]];
g3 = Plot[UnitStep[2 - τ], {τ, -4, 4}, PlotStyle → Thickness[0.05]];
GraphicsGrid[{{g1, g1}, {g2, g3}}]
```



Ejemplo 2 $e(t) * te(t)$

Al mover la función $e(t - \tau)$ hacia la derecha aparecen 4 instancias diferentes, en relación con $\tau e(\tau)$ $t < 0, 0 < t < 1, 1 < t < 2, 2 < t$. He aquí las gráficas respectivas.

```
e[t_] := If[0 ≤ t ≤ 1, 1, 0];
g1 = Plot[{e[-1 - τ], τ e[τ]}, {τ, -3, 4}, AspectRatio → Automatic,
  PlotRange → All, PlotStyle → {Thick}, Axes → False];
g2 = Plot[{e[0.5 - τ], τ e[τ]}, {τ, -3, 4}, AspectRatio → Automatic,
  PlotRange → All, PlotStyle → {Thick}, Axes → False];
g3 = Plot[{e[1.5 - τ], τ e[τ]}, {τ, -3, 4}, AspectRatio → Automatic,
  PlotRange → All, PlotStyle → {Thick}, Axes → False];
g4 = Plot[{e[3 - τ], τ e[τ]}, {τ, -3, 4}, AspectRatio → Automatic,
  PlotRange → All, PlotStyle → {Thick}, Axes → False];
GraphicsGrid[{{g1, g2}, {g3, g4}}]
```

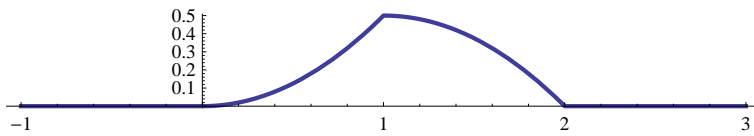


Calculamos la convolución en esas 4 instancias:

$$\begin{aligned} \text{si } t < 0 \quad e(t - \tau) \cdot \tau e(\tau) = 0 & \Rightarrow (e * te)(t) = 0 \\ \text{si } 0 < t < 1 \quad e(t - \tau) \cdot \tau e(\tau) = \tau \prod_{[0, t]}(\tau) & \Rightarrow (e * te)(t) = \int_0^t \tau d\tau = \frac{1}{2} t^2 \\ \text{si } 1 < 2 < t \quad e(t - \tau) \cdot \tau e(\tau) = \tau \prod_{[t-1, 1]}(\tau) & \Rightarrow (e * te)(t) = \int_{t-1}^1 \tau d\tau = \frac{1}{2} (1 - (t - 1)^2) \\ \text{si } 2 < t \quad e(t - \tau) \cdot \tau e(\tau) = 0 & \Rightarrow (e * te)(t) = 0 \end{aligned}$$

El gráfico de la convolución es el siguiente.

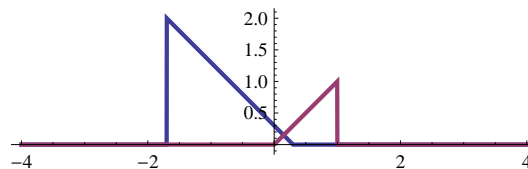
```
f[t_] := Which[t < 0, 0, 0 < t < 1,  $\frac{1}{2} t^2$ , 1 < t < 2,  $\frac{1}{2} (1 - (t - 1)^2)$ , 2 < t, 0]
Plot[f[t], {t, -1, 3}, AspectRatio -> Automatic, PlotStyle -> {Thick}]
```



Ejemplo 3 $t e(\frac{1}{2} t) * t e(t)$

Primero visualizamos el gráfico de $(t - \tau) e(\frac{1}{2}(t - \tau))$, para t entre 0 y 1, en relación a $\tau e(\tau)$.

```
e[t_] := If[0 <= t <= 1, 1, 0]; t = 0.5;
g[t_] := Plot[{(t - \tau) e[\frac{1}{2}(t - \tau)], \tau e[\tau]}, {\tau, -4, 4}, AspectRatio -> Automatic,
  PlotRange -> All, PlotStyle -> {Thick}]; g[0.3]
```



Cuando t se mueve desde $-\infty$ a $+\infty$, el gráfico de $(t - \tau) e(\frac{1}{2}(t - \tau))$ y el de $\tau e(\tau)$ presentan 5 configuraciones diferentes; calculamos la convolución en cada una de ellos.

Si $t < 0$ es 0

Si $0 < t < 1$ es $\int_0^t (t - \tau) \tau d\tau = \frac{t^3}{6}$

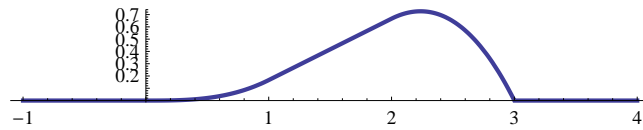
Si $1 < t < 2$ es $\int_0^1 (t - \tau) \tau d\tau = \frac{1}{6} (3t - 2)$

Si $2 < t < 0$ es $\int_{t-2}^1 (t - \tau) \tau d\tau = \frac{1}{6} (-t^3 + 15t - 18)$

Si $2 < t$ es 0

Hacemos la gráfica de la convolución obtenida.

```
x[t_] := Which[0 < t < 1,  $\frac{1}{6} t^3$ , 1 < t < 2,  $\frac{1}{6} (3 t - 2)$ , 2 < t < 3,  $\frac{1}{6} (-t^3 + 15 t - 18)$ , True, 0]
Plot[x[t], {t, -1, 4}, AspectRatio -> Automatic, PlotStyle -> {Thick}]
```



Ejercicio

Calcular y graficar las convoluciones $e(t) * e(t)$, $\Lambda(t) * u(t)$, $e(2t) * e(-t)$.

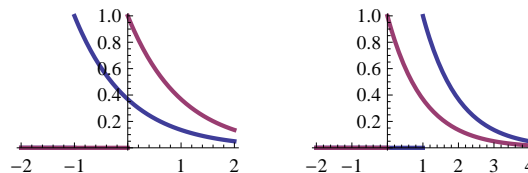
Ejercicio

Comprobar que $(\Lambda(t) * u(t))' = \Lambda'(t) * u(t)$.

Ejemplo 4 $e^t u(-t) * e^{-t} u(t)$

Primero visualizamos gráficos para $t = -1 < 0$ y $t = 1 > 0$, que dan las dos instancias posibles.

```
t1 = -1; g1 = Plot[{e^{t1-\tau} UnitStep[-(t1 - \tau)], e^{-\tau} UnitStep[\tau]}, {\tau, -2, 2},
  PlotStyle -> {Thick}];
t2 = 1; g2 = Plot[{e^{t2-\tau} UnitStep[-(t2 - \tau)], e^{-\tau} UnitStep[\tau]}, {\tau, -2, 4},
  PlotStyle -> {Thick}];
GraphicsGrid[{{g1, g2}}]
```



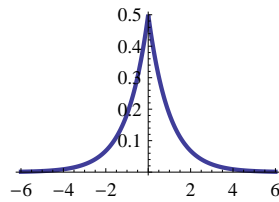
Calculamos la convolución en esas dos situaciones:

para $t < 0$ el producto es $e^{(t-\tau)} e^{-\tau} u(\tau)$ y la convolución es $\int_0^\infty e^{(t-\tau)} e^{-\tau} d\tau = \frac{1}{2} e^t$;

para $t > 0$ el producto es $e^{(t-\tau)} e^{-\tau} u(\tau - t)$ y la convolución es $\int_t^\infty e^{(t-\tau)} e^{-\tau} d\tau = \frac{1}{2} e^{-t}$.

Luego la convolución es la función par $e^t u(-t) * e^{-t} u(t) = \frac{1}{2} e^{-|t|}$ cuyo gráfico es

```
Plot[ $\frac{1}{2} e^{-\text{Abs}[\tau]}$ , { $\tau$ , -6, 6}, PlotStyle -> {Thick}]
```



Ejercicio

Calcular y graficar a) $t e(2t) * e(-t)$; b) $t e(\frac{t}{2}) * \Lambda(t)$; c) $|t| * e^{-t} u(t)$.

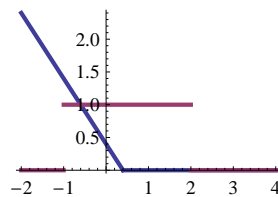
Ejercicio

Calcular y graficar $e^{-2t} u(t) * e^{-t} u(t)$ y $e^t u(-t) * e^{-2} u(-t)$

Ejemplo 5 $t u(t) * \Pi_{[-1,2]}(t)$

Visualizamos los gráficos para $t = 0.4$ y podemos prever 3 configuraciones distintas.

```
t = 0.4; Plot[{(t -  $\tau$ ) UnitStep[t -  $\tau$ ], UnitStep[ $\tau$  + 1] - UnitStep[ $\tau$  - 2]},  
{ $\tau$ , -2, 4}, PlotStyle -> {Thick}]
```



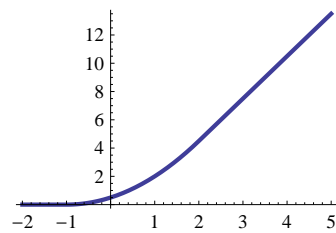
Para $t < -1$ el producto es 0 y la convolución es 0;

para $-1 < t < 2$ el producto es $(t - \tau) \Pi_{[-1,t]}(\tau)$ y la convolución $\int_{-1}^t (t - \tau) d\tau = \frac{1}{2} (t + 1)^2$;

para $2 < t$ el producto es $(t - \tau) \Pi_{[-1,2]}(\tau)$ y la convolución $\int_{-1}^2 (t - \tau) d\tau = 3t - \frac{3}{2}$.

Graficamos la convolución.

```
Plot[Which[t < -1, 0, -1 < t < 2,  $\frac{1}{2}(t+1)^2$ , 2 < t,  $3t - \frac{3}{2}$ ], {t, -2, 5},
PlotStyle -> {Thick}]
```



Ejercicio

Calcular y graficar a) $e(2t) * \text{sen } t$ y b) $t e(t) * e^t u(-t)$.

Ejercicio

Mostrar que las convoluciones $u(t) * u(-t)$, $u(t) * |t|$, $\text{sen } t * u(t)$ no existen.

Existencia y continuidad de la convolución

Si observamos los ejemplos dados, notamos que todas las convoluciones obtenidas son continuas, lo cual es un fenómeno bastante general, según se demuestra en el siguiente teorema.

Teorema 4.1

Sean $f(t)$ s.c. y absolutamente integrable y $g(t)$ s.c. y acotada.

Entonces la convolución $f * g$ existe y es continua.

Demostración

\

a) Para cada t la función $f(\tau)g(t-\tau)$ es s.c. y si $|g(t)| \leq K$ entonces $|f(\tau)g(t-\tau)| \leq |f(\tau)|K$.

Con esta acotación se ve que la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau) d\tau$ es absolutamente convergente y por lo tanto existe la convolución.

b) La demostración sobre la continuidad de la convolución excede el marco de estas notas y se puede omitir.

I) Sea $f_\delta(t) = f(t-\delta)$ el desplazamiento en δ de la función.

Veamos primero que $\|f - f_\delta\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f_\delta(t)| dt \rightarrow 0$ para $\delta \rightarrow 0$

Primer caso.

Supongamos que $f(t)$ es continua y vale cero fuera de un intervalo $[-M, M]$.

Dado $\epsilon > 0$ por ser f uniformemente continua existe $\delta > 0$ tal que si $|t - t_0| \leq \delta$ entonces

$$|f(t) - f(t_0)| \leq \frac{\epsilon}{2(M+1)}. \text{ Luego } \int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau) - f(\tau - \delta)| d\tau = \int_{-M-1}^{M+1} |f(\tau) - f(\tau - \delta)| d\tau \leq \epsilon$$

Caso general.

Sea $f(t)$ s.c. y absolutamente integrable.

Dado $\epsilon > 0$ existe un $M > 0$ y $\varphi(t)$ continua, nula fuera de $[-M, M]$, tal que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) - \varphi(t)| dt < \epsilon$.

Luego $\int_{-\infty}^{+\infty} |f_\delta(t) - \varphi_\delta(t)| dt < \epsilon$ y por la desigualdad triangular

$$\|f - f_\delta\|_1 \leq \|f - \varphi\|_1 + \|\varphi - \varphi_\delta\|_1 + \|\varphi_\delta - f_\delta\|_1 \leq 2\epsilon + \|\varphi - \varphi_\delta\|_1$$

El resultado se obtiene aplicando el primer caso a φ .

II) Sea $|g(t)| \leq K$. Entonces

$$\|(f * g)(t_0 - \delta) - (f * g)(t_0)\|_1 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} [f(t_0 - \delta - \tau) - f(t_0 - \tau)] g(\tau) d\tau \right| \leq K \|f - f_\delta\|_1$$

Esta desigualdad y la parte I) prueban la continuidad de la convolución.

q.e.d.

Ejercicio

- a) Calcular $e^{-t} u(t) * \text{sg}(t)$ y comprobar que es continua.
- b) Calcular la convolución $e^{-t} * \text{sen } t$ y comprobar que tiene derivada continua.

Ejemplo 5

La función $f(t) = \frac{1}{\sqrt{|t|}} e(t)$ es integrable, no es acotada ni s.c., pero existe la convolución $g = f * f$.

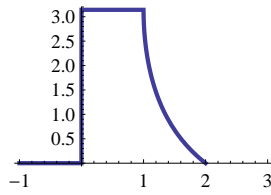
Para $t < 0$ ó $t > 2$, $g(t) = 0$; si $0 < t < 1$, $g(t) = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau(t-\tau)}} d\tau$; si $1 < t < 2$, $g(t) = \int_{t-1}^1 \frac{1}{\sqrt{\tau(t-\tau)}} d\tau$.

Para evaluar estas integrales, usamos el cambio de variables $\tau = t \text{ sen}^2 \phi$, que las hace viables,

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{\tau(t-\tau)}} d\tau = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi = \pi \quad \text{y} \quad \int_{t-1}^1 \frac{1}{\sqrt{\tau(t-\tau)}} d\tau = 2 \arcsen \frac{1}{\sqrt{t}} - 2 \arcsen \sqrt{\frac{t-1}{t}}$$

Luego la convolución tiene un salto de π en 0 y es continua en todos los demás valores. He aquí su gráfica.


```
Plot[Which[t < 0, 0, 0 < t < 1, π, 0 < t < 2,
2 ArcSin[1/√t] - 2 ArcSin[√(t-1)/t], t < 2, 0], {t, -1, 3}, PlotStyle -> {Thick}]
```



Si dos funciones son no acotadas, otro tipo de condición para asegurar la continuidad de la convolución, es la siguiente.

Teorema 4.2

Si $f(t)$ y $g(t)$ son funciones seccionalmente continuas, absolutamente integrables y de cuadrado integrable entonces la convolución $f * g$ es continua.

Demostración

La demostración es semejante a la dada para el teorema anterior y excede el marco de las presentes notas.

i) Veamos primero que $\|f - f_\delta\|_2 = (\int_{-\infty}^{\infty} |f(t) - f_\delta(t)|^2 dt)^{1/2} \rightarrow 0$ para $\delta \rightarrow 0$.

Si $f(t)$ es continua y vale cero fuera de $[-M, M]$, para $\epsilon > 0$, por continuidad uniforme, existe $\delta > 0$ tal que si $|t - t_0| \leq \delta$ entonces $|f(t) - f(t_0)| \leq \epsilon$. Luego

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\tau) - f(\tau - \delta)|^2 d\tau = \int_{-M-1}^{M+1} |f(\tau) - f(\tau - \delta)|^2 d\tau \leq (2M + 2) \epsilon^2$$

Para una $f(t)$ como en el enunciado, dado $\epsilon > 0$, existe un número grande M y una función continua $\varphi(t)$, nula fuera de $[-M, M]$, tal que $\|f - \varphi\|_2 = (\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t) - \varphi(t)|^2 dt)^{1/2} < \epsilon$. Entonces

$$\|f - f_\delta\|_2 \leq \|f - \varphi\|_2 + \|\varphi - \varphi_\delta\|_2 + \|\varphi_\delta - f_\delta\|_2 \leq 2\epsilon + \|\varphi - \varphi_\delta\|_2$$

y, por el caso ya estudiado, aplicado a φ , se obtiene el resultado.

ii) Se tiene

$$\begin{aligned} |(f * g)(t_0 - \delta) - (f * g)(t_0)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} [f(t_0 - \delta - \tau) - f(t_0 - \tau)] g(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \left| \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t_0 - \delta - \tau) - f(t_0 - \tau)| |g(\tau)| d\tau \right| \leq \|f - f_\delta\|_2 \|g\|_2 \end{aligned}$$

La última es la “desigualdad de Schwarz”. Luego por la parte i) se deduce la continuidad de la convolución.

q.e.d.

Convolución entre funciones causales

Sean $f(t)$ y $g(t)$ dos funciones s.c. y nulas para $t < 0$. La convolución es

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

y está definida para cada t . Probaremos que es continua en cada intervalo $-T \leq t \leq T$.

Sean $f_T(t) = f(t) u(T - t)$ y $g_T(t) = g(t) u(T - t)$ que son s.c. y absolutamente integrables en toda la recta y son acotadas. Por el teorema 4.1 la convolución $f_T * g_T$ es continua en toda la recta.

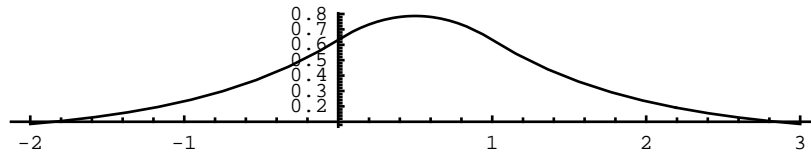
En el intervalo $-T \leq t \leq T$ es $(f_T * g_T)(t) = (f * g)(t)$. Por lo tanto, $f * g$ es continua en toda la recta.

Esta es otra demostración, más general, del teorema 1.6 parte i)

Ejercicio

a) Verificar que la gráfica de la convolución de $f(t) = t e(t)$ con $g(t) = \Pi_{[-1,1]}(t)$ es la siguiente.

b) Idem para la gráfica de la convolución de $f(t) = e(t)$ con $g(t) = e^{-|t|}$.



Propiedades de la convolución

Demostrar, bajo condiciones adecuadas, las siguientes propiedades:

1. Es distributiva $f * (c_1 g_1 + c_2 g_2) = c_1 f * g_1 + c_2 f * g_2$
2. Es conmutativa $f * g = g * f$
3. Es asociativa $(f * g) * h = f * (g * h)$

Ejercicio

Sea $f_\alpha(t) = f(t - \alpha)$ el desplazamiento de $f(t)$ en α .

a) Demostrar que $f_\alpha * g = f * g_\alpha = (f * g)_\alpha$

b) Demostrar que $f_\alpha * g_\beta = (f * g)_{\alpha+\beta}$

En particular si $\alpha + \beta = 0$ se tiene $f_\alpha * g_\beta = f * g$. Comprobarlo para $u_{-2} * u_2 = u * u$

Ejercicio

Recordemos que una función es par si $f(-t) = f(t)$ y es impar si $f(-t) = -f(t)$.

- a) Sean $f(t)$ y $g(t)$ ambas pares o ambas impares. Demostrar que $f * g$ es par.
- b) Sea $f(t)$ par y $g(t)$ impar. Demostrar que $f * g$ es impar.

Convolución y derivada

Teorema 4.3

Sean $f(t)$ y $f'(t)$ continuas y absolutamente integrables y $g(t)$ s.c. y acotada.

Entonces la convolución $f * g$ tiene derivada continua dada por $(f * g)' = f' * g$

Demostración

Hacemos el cociente incremental $\frac{1}{\Delta t}[(f * g)(t + \Delta t) - (f * g)(t)]$. Por el teorema del valor medio

$$f(t + \Delta t - \tau) - f(t - \tau) = f'(t + \theta \Delta t - \tau) \Delta t, \quad 0 < \theta < 1, \text{ y por lo tanto}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t}[(f * g)(t + \Delta t) - (f * g)(t)] &= \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t + \Delta t - \tau) g(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) g(\tau) d\tau \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t + \theta \Delta t - \tau) g(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Por el teorema 4.1 $\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t - \tau - \delta) g(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t - \tau) g(\tau) d\tau$

y como $0 < \theta < 1$ resulta $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t + \theta \Delta t - \tau) g(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t - \tau) g(\tau) d\tau$

lo cual demuestra que $(f * g)' = f' * g$. Por el teorema 4.1 esta convolución es continua.

q.e.d.

Esto nos proporciona la "regla de derivación de la convolución"

$$(f * g)' = f' * g$$

Ejemplo

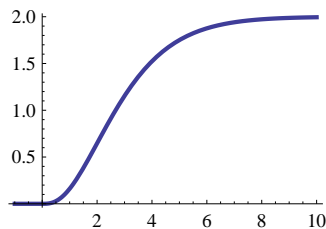
$f(t) = t^2 e^{-t} u(t)$ es continua con derivada continua, $f'(t) = t(2 - t) e^{-t} u(t)$
 y ambas son absolutamente integrables
 $g(t) = u(t)$ es seccionalmente continua y acotada

Comprobamos la fórmula anterior.

Para $t > 0$ es $(f * g)(t) = \int_0^t \tau^2 e^{-\tau} d\tau = 2 - (2 + 2t + t^2) e^{-t}$

Luego $(f * g)(t) = [2 - (2 + 2t + t^2) e^{-t}] u(t)$

```
Plot[If[t < 0, 0, 2 - (2 + 2 t + t^2) e^-t], {t, -1, 10}, PlotStyle -> {Thick}]
```



$$(f * g)'(t) = t^2 e^{-t} u(t) \quad \text{y} \quad (f' * g)(t) = \left[\int_0^t \tau(2-\tau) e^{-\tau} d\tau \right] u(t) = t^2 e^{-t} u(t)$$

Ejercicio

a) Analizar el caso de $f(t) = e^{-t}$ y $g(t) = u(t)$.

Rta: $(f * g)(t) = e^t u(-t) + (2 - e^{-t}) u(t)$ con derivada continua.

b) Idem para $f(t) = e^{-t}$, $g(t) = e(t)$.

Convolución con funciones generalizadas

Sea F una función generalizada de orden k y g una función s.c. y de soporte compacto. Sea $\tilde{g}(t) = g(-t)$. Definimos la convolución $F * g$ como la función generalizada de orden k , que opera sobre funciones con k derivadas continuas y soporte compacto, mediante la regla

$$(F * g)(\varphi) := F(\tilde{g} * \varphi)$$

a) Esta definición es consistente pues, si φ tiene k derivadas continuas y soporte compacto, la función $\tilde{g} * \varphi$ tiene soporte compacto y, por el teorema 4.3, tiene k derivadas continuas; se le puede aplicar F .

b) Si $F = F_f$, donde f es una función s.c., entonces está definida la convolución usual $f * g$.

Demostremos que $F_{f * g} = F_f * g$. En efecto, para cada función de prueba φ ,

$$\begin{aligned} F_{f * g}(\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right) \varphi(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) \varphi(t) dt \right) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(\tau - t) \varphi(t) dt \right) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) (\tilde{g} * \varphi)(\tau) d\tau = F_f(\tilde{g} * \varphi) = (F_f * g)(\varphi) \end{aligned}$$

Decimos que F tiene soporte compacto si existe un $M > 0$ tal que, si $\varphi(t) = 0$ $|t| > M$, entonces $F(\varphi) = 0$. Sea $K(t)$ muy buena que vale 1 en $[-M, M]$; para cada φ de prueba, $\varphi = K\varphi + (1 - K)\varphi$ y por lo tanto $F(\varphi) = F(K\varphi) + F((1 - K)\varphi) = F(\varphi)$; luego F opera sobre $\mathcal{D}^{(k)}$.

La definición $(F * g)(\varphi) := F(\tilde{g} * \varphi)$ también tiene sentido suponiendo:

i) F de soporte compacto y orden k y g s.c..

En efecto, dada φ con k derivadas continuas y soporte compacto, la función $\tilde{g} * \varphi$, por el teorema 4.3, tiene k derivadas continuas, y se le puede aplicar F .

ii) F es causal de orden k y g es causal y s.c..

Pues, dada φ con k derivadas continuas y soporte compacto en $[-M, M]$, la función $\tilde{g} * \varphi$, por el teorema 4.3, tiene k derivadas continuas, y su soporte está en $t \leq M$; por lo tanto se le

puede aplicar F .

Ejemplo 1

Sea $f(t)$ una función continua. Calculamos la función generalizada $\delta * f$

$$(\delta * f)(\varphi) = \delta(\tilde{f} * \varphi) = (\tilde{f} * \varphi)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(0-t) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi(t) dt$$

Luego $\delta * f = F_f$. Esta igualdad la abreviamos así: $\delta * f = f$

Ejemplo 2

Sea $f(t)$ una función continua con derivada s.c. Calculamos la función generalizada $\delta' * f$

$$(\delta' * f)(\varphi) = \delta'(\tilde{f} * \varphi) = -(\tilde{f} * \varphi)'(0) = -(\tilde{f}' * \varphi)(0) = -\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}'(t) \varphi(0-t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) \varphi(t) dt$$

Luego $\delta' * f = F_{f'}$. Esta igualdad la abreviamos así $\delta' * f = f'$.

Ambos resultados se podían prever desde un contexto más elemental. En efecto,

$$(\delta * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) f(t-\tau) d\tau = f(t)$$

$$(\delta' * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(\tau) f(t-\tau) d\tau := -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) \frac{d}{d\tau} f(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) f'(t-\tau) d\tau = f'(t)$$

Ejemplo 3

$$\Lambda * \delta' = \Lambda' = e(t+1) - e(t)$$

$$\begin{aligned} \Lambda * e'' &= \Lambda * [\delta'(t) - \delta'(t-1)] = \Lambda * \delta'(t) - \Lambda * \delta'(t-1) = \Lambda'(t) - \Lambda'(t-1) \\ &= [e(t+1) - e(t)] - [e(t) - e(t-1)] = e(t+1) - 2e(t) + e(t-1) \end{aligned}$$

Teorema 4.4

- Sea F una función generalizada de orden k y f una función s.c. y de soporte compacto.
- Sea F una función generalizada de soporte compacto y orden k y f una función s.c..
- Sea F una función generalizada causal y orden k y f una función s.c. y causal.

En cada uno de esos casos vale la regla de derivación de la convolución

$$(F * f)' = F' * f .$$

Demostración

a) Para cada función φ , con $(k + 1)$ derivadas continuas y soporte compacto, vale $(\tilde{f} * \varphi)' = \tilde{f} * \varphi'$ y por lo tanto, la función $\tilde{f} * \varphi'$ tiene k derivadas y es de soporte compacto.

$$(F * f)'(\varphi) := -(F * f)(\varphi') = -F(\tilde{f} * \varphi') = -F[(\tilde{f} * \varphi)'] = F'(\tilde{f} * \varphi) = (F' * f)(\varphi)$$

b) y c) Demostraciones análogas.

q.e.d.

Este resultado permite obtener y mejorar la regla de Leibniz dada en el teorema 1.6 cuyo enunciado es

" Si $f(t)$ es s.c. en $[0, \infty)$ y $g(t)$ tiene derivada continua en $[0, \infty)$ entonces $F(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau$ es derivable en cada punto de continuidad de f y $F'(t) = \int_0^t f(\tau) g'(t - \tau) d\tau + f(t) g(0)$ "

Para ello extendemos por cero ambas funciones en $t < 0$ de tal manera que $g(t)$ tiene un salto finito en 0 y $F_g' = F_g' + g(0) \delta(t)$. Teniendo en cuenta que $F_{g*f} = F_g * f$ y aplicando el teorema 4.4. c)

$$(F_{g*f})' = (F_g * f)' = F_g' * f = [F_g' + g(0) \delta(t)] * f = F_g' * f + g(0) \delta(t) * f = F_{g'*f} + g(0) f$$

$$\left(\int_0^t g(t - \tau) f(\tau) d\tau\right)' = \int_0^t g'(t - \tau) f(\tau) d\tau + g(0) f(t)$$

Podemos mejorar el teorema 4.3 con el siguiente enunciado cuya demostración excede el marco de estas notas.

Teorema 4.5

Sea $f(t)$ continua con derivada $f'(t)$ seccionalmente continua y ambas absolutamente integrables.

Sea $g(t)$ s.c. y acotada. Entonces la convolución $f * g$ tiene derivada continua dada por $(f * g)' = f' * g$.

Demostración

Supongamos primero que $g(t)$ tiene soporte compacto.

Entonces para cada función muy buena φ la convolución $\tilde{g} * \varphi$ tiene infinitas derivadas y soporte compacto. Por el teorema anterior

$$(F_{f*\tilde{g}})' = (F_f * \tilde{g})' = F_f' * \tilde{g} = F_f' * \tilde{g} = F_f' * \tilde{g}$$

Como $f' * \tilde{g}$ es continua, por el teorema 4.3, $f * g$ es derivable para todo t y su derivada es $f' * g$.

Si $g(t)$ no tiene soporte compacto, consideramos $g_n(t) = g(t) \chi_{[-n, n]}(t)$, que es seccionalmente continua y con soporte compacto. Por lo anterior $f * g_n$ tiene derivada continua dada por $f' * g_n$. Sea $|g(t)| \leq K$. Para t en el intervalo acotado $-M < t < M$, se tiene para $n > 2M$

$$\begin{aligned} |(f * g)(t) - (f * g_n)(t)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t - \tau) (g(\tau) - g_n(\tau))| d\tau \leq \int_{|\tau| \geq n} |f(t - \tau) g(\tau)| d\tau \\ &\leq K \int_{|\tau| \geq n} |f(t - \tau)| d\tau \leq K \int_{|\tau| \geq \frac{n}{2}} |f(\tau)| d\tau \end{aligned}$$

lo cual prueba que la sucesión $(f * g_n)(t)$ converge uniformemente a $(f * g)(t)$ en $|t| \leq M$. De la misma manera se prueba que $(f * g_n)'(t) = (f' * g_n)(t)$ converge uniformemente a $(f' * g)(t)$ en $|t| \leq M$. Luego, por un resultado elemental, se tiene que $f * g$ tiene derivada continua dada por $f' * g$ en el intervalo $|t| \leq M$, y por lo tanto en toda la recta.

q.e.d.

Ejemplo 1

$f(t) = t e^{-t} u(t)$ es continua con derivada seccionalmente continua, $f'(t) = (1 - t) e^{-t} u(t)$
 y ambas son absolutamente integrables
 $g(t) = u(t)$ seccionalmente continua y acotada

Comprobamos la fórmula anterior.

Por un lado $(f * g)(t) = (-e^{-t} + 1 - t e^{-t}) u(t)$

$$(f * g)'(t) = t e^{-t} u(t) \quad \text{y} \quad (f' * g)(t) = \left[\int_0^t (1 - \tau) e^{-\tau} d\tau \right] u(t) = t e^{-t} u(t)$$

Ejemplo 2

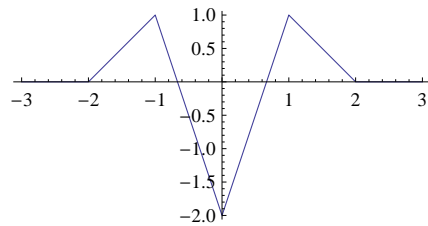
$$\Lambda' * \Lambda' = (\Lambda' * \Lambda)' = \Lambda'' * \Lambda = \{\delta[t + 1] - 2\delta[t] + \delta[t - 1]\} * \Lambda = \Lambda(t + 1) - 2\Lambda(t) + \Lambda(t - 1)$$

La gráfica es la siguiente.

```

 $\Lambda[t\_]$  := If[-1 < t < 1, 1 - Abs[t], 0];
Plot[ $\Lambda[t + 1] - 2 \Lambda[t] + \Lambda[t - 1]$ , {t, -3, 3}, AspectRatio -> Automatic]

```



Hacer la convolución $\Lambda' * \Lambda'$ directamente.

Sugerencia: como Λ' es impar, $\Lambda' * \Lambda'$ es par, y basta calcularla para $t > 0$.

Ejercicio

Comprobar las igualdades

$$(t e(t) * e(t))' = t e(t) * e'(t) = t e(t) * (\delta[t] - \delta[t - 1]) = t e(t) - (t - 1) e(t - 1)$$

Ejercicio

a) Analizar el caso de $f(t) = e^{-t}$ y $g(t) = u(t)$.

Rta: $(f * g)(t) = e^t u(-t) + (2 - e^{-t}) u(t)$ que tiene derivada continua.

b) Idem para $f(t) = e^{-t}$, $g(t) = e(t)$.

Ejercicio

a) Calcular $\Lambda * u$ y comprobar que su derivada es $(\Lambda * u)' = \Lambda * u' = \Lambda * \delta = \Lambda$

b) Sea $f(t) = e^{-t} e(t)$. Comprobar la igualdad $(f * f)' = f' * f$

c) Comprobar $(r * \delta)' = r' * \delta = u * \delta = u$

Ejercicio

Una función tiene período $p > 0$ si $f(t + p) = f(t)$.

a) Probar que si $f(t)$ es seccionalmente continua y tiene período p , $g(t)$ seccionalmente continua y absolutamente integrable, entonces la convolución $f * g$ está definida y tiene período p .

b) Sea $f(t)$ de período 2 y modelo $e(t)$. Hallar $f * e$ y comprobar que $(f * e)' = f * e'$.

Ejercicio

Sea $f(t) = e^{-at} u(t) * e^{-|t|}$ con $a > 0$.

a) Comprobar que $f(t)$ tiene derivada primera continua pero que $f''(0^-) \neq f''(0^+)$.

(Considerar por separado los casos $a = 1$ y $a \neq 1$).

b) Ver que $f(t)$ es la solución de $x' + ax = e^{-|t|}$ que vale 0 en $\pm\infty$.

c) Si se tiene un circuito en serie RL y se le conecta el voltaje $v(t) = e^{-|t|}$, hallar la corriente $i(t)$ que se genera suponiendo que $i(\pm\infty) = 0$.

Ejercicio

Encontrar la respuesta al impulso unitario de la corriente en un circuito en paralelo RL y donde la entrada es una corriente.

Ejercicio

Comprobar que si $f(t)$ tiene derivada continua entonces

$$(f * \delta)' = f * \delta' = f'$$

En general, si $f(t)$ tiene k derivadas continuas entonces

$$(f * \delta)^{(k)} = f^{(k)} = f * \delta^{(k)}$$

Identidad aproximada

Si $g(t) = e^{-\frac{1}{\epsilon}t} u(t)$ entonces $g(t)g(1-t)$ es muy buena; si $\alpha = \int_0^1 g(t)g(1-t) dt > 0$, sea $k(t) = \alpha^{-1} g(t)g(1-t)$.

Entonces $k_\epsilon(t) = \frac{1}{\epsilon} k\left(\frac{t}{\epsilon}\right)$ verifica $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} k_\epsilon(t) = \delta(t)$.

Sea $f(t)$ con k derivadas continuas y soporte compacto. La convolución $f_\epsilon(t) = k_\epsilon(t) * f(t)$ es una función muy buena cuyas primeras derivadas son $f_\epsilon^{(i)}(t) = k_\epsilon(t) * f^{(i)}(t)$, $0 \leq i \leq k$, y aproximan a cada $f^{(i)}$, $0 \leq i \leq k$.

Ecuaciones generales

Consideramos ecuaciones del tipo $\mathcal{L}(x) = \mathcal{H}(f)$ donde

$$\mathcal{L}(x) = a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x \quad \text{y} \quad \mathcal{H}(f) = b_0 f^{(r)} + \dots + b_r f$$

y las analizamos en el marco de las funciones generalizadas.

Para una función generalizada F , $\mathcal{H}(F)$ es una función generalizada y si F es causal, $\mathcal{H}(F)$ es causal.

Si X es una solución generalizada de $\mathcal{L}(X) = \mathcal{H}(F)$, entonces todas las soluciones generalizadas son $X + x_0$ donde x_0 una solución de la homogénea, que, según se ha visto, es una solución clásica.

En particular, si F es causal, hay una única solución causal.

Si h es la respuesta causal de $\mathcal{L}(X) = \delta$, entonces $\mathcal{H}(\mathcal{L}(h)) = \mathcal{H}(\delta)$, y como los operadores \mathcal{L} y \mathcal{H} conmutan: $\mathcal{L}\mathcal{H} = \mathcal{H}\mathcal{L}$, obtenemos $\mathcal{L}(\mathcal{H}(h)) = \mathcal{H}(\delta)$.
 Luego $\mathcal{H}(h)$ es la respuesta causal de $\mathcal{L}(X) = \mathcal{H}(\delta)$.

Dada una función $f(t)$ s.c., la convolución $X = f * \mathcal{H}(h)$ es una función generalizada tal que

$$\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(f * \mathcal{H}(h)) = f * \mathcal{L}\mathcal{H}(h) = f * \mathcal{H}\mathcal{L}(h) = \mathcal{H}(f * \mathcal{L}(h)) = \mathcal{H}(f * \delta) = \mathcal{H}(f)$$

lo cual muestra que $X = \mathcal{H}(f) * h = f * \mathcal{H}(h)$ es una solución de $\mathcal{L}(X) = \mathcal{H}(f)$.

Ejemplo 1

Resolvemos $x' - x = u' + u$

Luego $\mathcal{H}(f) = f' + f$ y $f = u$. La respuesta causal de $x' - x = \delta$ es $h(t) = e^t u(t)$.

La solución causal de la ecuación la calculamos de las dos maneras:

$$x(t) = \mathcal{H}(f) * h = [\delta(t) + u(t)] * e^t u(t) = e^t u(t) + \left(\int_0^t e^\tau d\tau\right) u(t) = (2e^t - 1) u(t)$$

$$x(t) = f * \mathcal{H}(h) = u(t) * [2e^t u(t) + \delta(t)] = 2 \left(\int_0^t e^\tau d\tau\right) u(t) + u(t) = (2e^t - 1) u(t)$$

Comprobamos que es solución:

$$x'(t) - x(t) = 2e^t u(t) + \delta(t) - (2e^t - 1) u(t) = \delta(t) + u(t) = f'(t) + f(t)$$

Ejemplo 2

Consideremos la ecuación $x'' + 2x' + x = f' - 3f$

a) Para la entrada $f(t) = e^{-2t} u(t)$.

Calculamos de las dos maneras la solución causal $x = h * \mathcal{H}(f) = \mathcal{H}(h) * f$ donde $h(t) = t e^{-t} u(t)$.

$$\mathcal{H}(h) = h'(t) - 3h(t) = (1 - 4t) e^{-t} u(t) \quad \text{y} \quad x(t) = \mathcal{H}(h) * f = [(1 - 4t) e^{-t} u(t)] * [e^{-2t} u(t)]$$

$$\mathcal{H}(f) = f'(t) - 3f(t) = -5e^{-2t} u(t) + \delta(t) \quad \text{y} \quad x(t) = [t e^{-t} u(t)] * [-5e^{-2t} u(t) + \delta(t)]$$

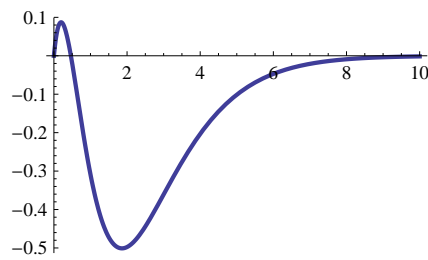
Ambas convoluciones son iguales pues

$$\left\{ \int_0^t (1 - 4\tau) e^{-\tau} e^{-2(t-\tau)} d\tau, -5 \int_0^t \tau e^{-\tau} e^{-2(t-\tau)} d\tau + t e^{-t} \right\} // \text{Simplify}$$

$$\left\{ e^{-2t} (-5 + e^t (5 - 4t)), e^{-2t} (-5 + e^t (5 - 4t)) \right\}$$

Luego la solución es $x(t) = [-5e^{-2t} - e^{-t}(4t - 5)] u(t)$, y como $\mathcal{H}(f)$ no es una función, la solución es continua pero no tiene derivada continua: $x(0) = 0$, $x'(0^-) = 0$, $x'(0^+) = 1$.

`Plot[-5 e-2t - e-t (4t - 5), {t, 0, 10}, PlotStyle -> {Thick}]`



b) Para la entrada $f(t) = \text{sen } t$.

Calculamos la solución por $x(t) = h * \mathcal{H}(f) = t e^{-t} u(t) * [\cos t - 3 \text{sen } t]$

$$\int_{-\infty}^t (\text{Cos}[\tau] - 3 \text{Sin}[\tau]) (t - \tau) e^{-(t-\tau)} d\tau$$

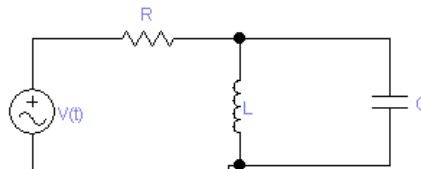
$$\frac{1}{2} (3 \text{Cos}[t] + \text{Sin}[t])$$

Comprobamos que $x(t) = \frac{3}{2} \cos t + \frac{1}{2} \text{sen } t$ es una solución.

```
x[t_] := 3/2 Cos[t] + 1/2 Sin[t]
x''[t] + 2 x'[t] + x[t] // Simplify
Cos[t] - 3 Sin[t]
```

Ejemplo 3

En el circuito de la figura, hay un potencial de entrada $V(t)$.



Buscamos la ecuación que verifica el potencial en el capacitor $v_C(t)$.

Se tienen las ecuaciones $v_C + R i_R = V(t)$; $L i_L' = v_C$; $i_L + i_C = i_R$; $C v_C' = i_C$

Poniendo todo en términos de v_C obtenemos la ecuación:

$$C R v_C'' + v_C' + \frac{R}{L} v_C = V'(t)$$

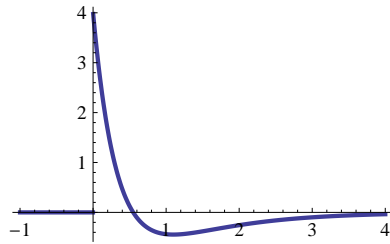
a) Para $R = \frac{3}{4} \Omega$, $L = 1 H$, $C = \frac{1}{3} F$ buscamos la respuesta causal a δ .

$$\frac{1}{4} v_C'' + v_C' + \frac{3}{4} v_C = \delta'(t) \quad \text{y} \quad h(t) = (2 e^{-t} - 2 e^{-3t}) u(t)$$

Luego la solución es

$$h'(t) = [2(e^{-t} - e^{-3t})u(t)]' = 2(-e^{-t} + 3e^{-3t})u(t)$$

```
Plot[2 (-e^-t + 3 e^-3t) UnitStep[t], {t, -1, 4}, PlotRange -> All, PlotStyle -> {Thick}]
```



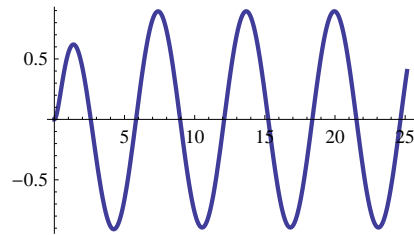
b) Para $V(t) = \sin t u(t)$ y condiciones iniciales nulas la solución es

$$V(t) * h'(t) = \sin t u(t) * 2(-e^{-t} + 3e^{-3t})u(t)$$

$$\int_0^t \sin[t - \tau] 2(-e^{-\tau} + 3e^{-3\tau}) d\tau$$

$$\frac{1}{5} (3e^{-3t} - 5e^{-t} + 2\cos[t] + 4\sin[t])$$

```
Plot[ $\frac{1}{5} (3 e^{-3t} - 5 e^{-t} + 2 \cos[t] + 4 \sin[t])$ , {t, 0, 8 \pi}, PlotStyle -> {Thick}]
```



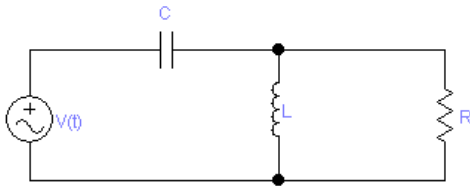
Ejercicio

Considere la ecuación $x'' - x' - 2x = f' - 2f$.

- Halle la respuesta causal al impulso unitario.
- Muestre que, partiendo del reposo, a una entrada acotada le corresponde una salida acotada pero que si inesperadamente pasa a condiciones iniciales no nulas la respuesta puede ser no acotada.

Ejercicio

- En el circuito de la figura



verificar que la ecuación del potencial en el capacitor v_C es

$$RCLv_C'' + Lv_C' + Rv_C = R V(t) + L V'(t)$$

- Para $R = 1 \Omega$, $L = 2 H$, $C = \frac{1}{2} F$, $V(t) = u(t)$ y condiciones iniciales nulas mostrar que

$$v_C(t) = (1 + t e^{-t} - e^{-t}) u(t)$$

Graficar $v_C(t)$ e $i_C(t)$ e interpretar físicamente.

5. SISTEMAS LINEALES

Respuesta causal de un sistema al impulso unitario

Dado un sistema lineal $X' = A X + B f(t)$ con una entrada $f(t)$, queremos encontrar la respuesta causal $h(t)$ al impulso unitario con condición inicial $X(0^-) = 0$.

Para $t < 0$ debe ser $h(t) = 0$, mientras que para $t > 0$ debe ser $h(t) = X_0(t)$, una solución de la homogénea $X' = A X$. Por ello proponemos $h(t) = X_0(t) u(t)$. Derivando obtenemos:

$$h'(t) = X_0'(t) u(t) + X_0(t) \delta(t) = A X_0(t) u(t) + X_0(0) \delta(t) = A h(t) + X_0(0) \delta(t)$$

de donde resulta $X_0(0) = B$. Luego

$$h(t) = X_0(t) u(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ \dots \\ h_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{donde} \quad X_0'(t) = A X_0 \quad \text{y} \quad X_0(0) = B$$

En palabras: el sistema en reposo urgido por el impulso unitario, "salta" a la posición B y luego evoluciona libremente desde esa posición.

Consideremos ahora el sistema no homogéneo $X' = A X + B f(t)$, $X(0^-) = 0$.

Convolucionando la igualdad $h' = A h + B \delta(t)$ con la entrada $f(t)$ se tiene

$$h' * f = A h * f + B \delta * f = A (h * f) + B (\delta * f) \Rightarrow (h * f)' = A (h * f) + B f$$

Luego la solución es

$$X(t) = (h * f)(t) = \int_0^t h(t - \tau) f(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} h_1 * f \\ \dots \\ h_n * f \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1

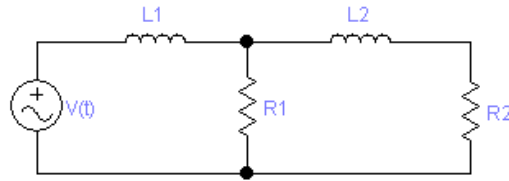
La respuesta al impulso unitario de $x'' + c_1 x' + c_2 x = f(t)$, $x(0) = x'(0) = 0$ es $h(t) = \varphi(t) u(t)$ donde $\varphi'' + c_1 \varphi' + c_2 \varphi = 0$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$.

Usando las variables de estado $x_1 = x$, $x_2 = x'$ el problema anterior equivale al sistema

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c_2 & -c_1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} f(t), \quad X(0) = 0 \quad \text{y} \quad h(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \end{pmatrix} u(t)$$

Ejemplo 2

Consideremos el circuito de la figura con un potencial $V(t)$ de entrada.



Las corrientes en las bobinas verifican:
$$\begin{pmatrix} i_1' \\ i_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & \frac{R_1}{L_1} \\ \frac{R_1}{L_2} & -\frac{R_1+R_2}{L_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \end{pmatrix} V(t)$$

Para $R_1 = 2$, $R_2 = 4$, $L_1 = 1$, $L_2 = 2$ el sistema es

$$\begin{pmatrix} i_1' \\ i_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} V(t)$$

y la solución general de la ecuación homogénea es

$$X(t) = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t} \quad \text{y} \quad h(t) = \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t} \right] u(t)$$

Si el potencial de entrada es $V(t) = e^{-2t} u(t)$, $X(0) = 0$ la solución es la convolución

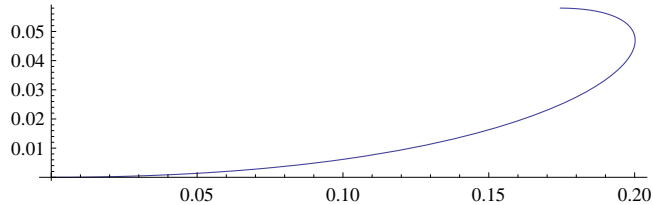
$$X(t) = \int_0^t \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-(t-\tau)} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4(t-\tau)} \right] e^{-2\tau} d\tau$$

La calculamos y graficamos.

$$\{p, q\} = \int_0^t \frac{1}{3} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-(t-\tau)} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4(t-\tau)} \right) e^{-2\tau} d\tau$$

ParametricPlot[{p[[1]], q[[1]]}, {t, 0, 1}]

$$\left\{ \left\{ \frac{1}{6} e^{-4t} (-1 - 3 e^{2t} + 4 e^{3t}) \right\}, \left\{ \frac{1}{6} e^{-4t} (-1 + e^t)^2 (1 + 2 e^t) \right\} \right\}$$



Respuesta a una entrada instantánea arbitraria. Controlabilidad instantánea.

Sabemos que $h(t) = \varphi(t) u(t)$, $\varphi(0) = B$ verifica $h' = A h + B \delta$, $h(0^-) = 0$.

Derivando obtenemos $h'' = A h' + B \delta'$, $h'(0^-) = 0$ y $h'(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} h'(t) = A h(0^+) = A B$

Por lo tanto $h'(t)$ es solución de $X' = A X + B \delta'$, $X(0^-) = 0$ y $h'(0^+) = A B$

Iterando se ve que la respuesta a $X' = A X + B \delta^{(i)}$, $X(0^-) = 0$ es $h^{(i)}(t)$ y $h^{(i)}(0^+) = A^i B$.

Luego, si $\tilde{\delta}(t) = c_0 \delta + c_1 \delta' + c_2 \delta'' + \dots + c_k \delta^{(k)}$ es un impulso instantáneo arbitrario, la respuesta de

$$X' = A X + B \tilde{\delta}, \quad X(0^-) = 0$$

es $X = c_0 h + c_1 h' + c_2 h'' + \dots + c_k h^{(k)}$ y $X(0^+) = c_0 B + c_1 A B + c_2 A^2 B + \dots + c_k A^k B$

Entonces mediante impulsos instantáneos se puede llevar al sistema desde el reposo a cualquier posición C que sea combinación lineal de los vectores $B, AB, A^2 B, \dots$, o sea, que esté en el subespacio: $[B, AB, A^2 B, \dots]$ de \mathbb{R}^n . Por el teorema de Cayley-Hamilton, si el polinomio característico de A es $\lambda^n + c_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + c_1 \lambda + c_0$, vale $A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \dots + c_1 A + c_0 I = 0$; despejando A^n obtenemos $A^n = -c_{n-1} A^{n-1} - \dots - c_1 A - c_0 I$. Luego $A^n B$ es combinación lineal de $B, AB, \dots, A^{n-1} B$ y por lo tanto $[B, AB, \dots, A^{n-1} B] = [B, AB, A^2 B, \dots, A^n B]$. Iterando se obtiene la igualdad de subespacios de \mathbb{R}^n : $[B, AB, \dots, A^{n-1} B] = [B, AB, A^2 B, \dots]$. Por lo tanto, sólo interesan los impulsos instantáneos $\alpha_0 \delta(t) + \alpha_1 \delta'(t) + \dots + \alpha_{n-1} \delta^{(n-1)}(t)$.

- * Si los vectores $B, AB, \dots, A^{n-1} B$ forman una base de \mathbb{R}^n , cualquier vector C de \mathbb{R}^n es alcanzable por el sistema, mediante un impulso instantáneo adecuado, partiendo del reposo. Decimos que el sistema es controlable en forma instantánea.
- * Si los vectores $A^k B$: $k = 0, 1, \dots, n-1$, son linealmente dependientes, y por lo tanto no generan \mathbb{R}^n , hay vectores C en \mathbb{R}^n que no son alcanzables por el sistema, mediante impulsos instantáneos partiendo del reposo, y decimos que el sistema no es controlable en forma instantánea.

La matriz cuadrada de orden n $C(A, B) = (B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ se llama matriz de controlabilidad. Hemos demostrado el siguiente resultado.

Teorema 5.1 Un sistema es controlable en forma instantánea si y sólo si la matriz de controlabilidad es invertible.

En ese caso, dado un vector C , calculamos sus coordenadas en la base $B, AB, \dots, A^{n-1}B$:

$$C = \alpha_0 B + \alpha_1 AB + \dots + \alpha_{n-1} A^{n-1} B$$

y tomamos la entrada instantánea $\tilde{\delta}(t) = \alpha_0 \delta(t) + \alpha_1 \delta'(t) + \dots + \alpha_{n-1} \delta^{(n-1)}(t)$

Entonces la solución de $X' = AX + B\tilde{\delta}(t)$, $X(0^-) = 0$, verifica $X(0^+) = C$.

En un sistema controlable, la entrada afecta a cada estado. Dicho de otra manera, si algún estado no está vinculado a la entrada, no se puede "controlar" desde afuera.

Teorema 5.2

La controlabilidad instantánea no depende del sistema de coordenadas.

Demostración

Sea $X' = AX + Bf(t)$ y sea M una matriz invertible.

En las variables $Y = MX$ el sistema es $Y' = MAM^{-1}Y + MBf(t) = A^*Y + B^*f(t)$.

La nueva matriz de controlabilidad es

$$\begin{aligned} C(A^*, B^*) &= (B^*, A^*B^*, \dots, A^{*(n-1)}B^*) = (MB, MA B, \dots, MA^{(n-1)}B) \\ &= M(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = M C(A, B) \end{aligned}$$

Luego $C(A^*, B^*)$ es invertible si y sólo si $C(A, B)$ lo es.

q.e.d.

Teorema 5.3 Test PBH de controlabilidad (Popov-Belevitch-Hautus)

El sistema $X' = AX + Bf(t)$ no es controlable si y sólo si existe un autovector v a izquierda de A que es ortogonal a B , o sea, $v \neq 0$, $vA = \lambda v$, $v \cdot B = 0$.

Demostración

\Rightarrow)

Si no es controlable los vectores $B, AB, \dots, A^{n-1}B$ son linealmente dependientes y el subespacio S ortogonal a $[B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ tiene dimensión ≥ 1 :

$$S = \{ v = (x_1, \dots, x_n) : vB = 0, vAB = 0, \dots, vA^{n-1}B = 0 \}$$

Si $v = (x_1, \dots, x_n) \in S$, utilizando Cayley-Hamilton obtenemos $vA^n B = 0$ y entonces $vA \in S$. Luego A define una transformación lineal $S \rightarrow S$ dada por $v \rightarrow vA$; como toda transformación lineal, tiene un autovalor λ y un autovector $v \in S$ asociado. Entonces $v \neq 0$, $vA = \lambda v$ y $vB = 0$.

\Leftrightarrow

Si existe un autovector $v \neq 0$ a izquierda de A : $vA = \lambda v$ ortogonal a B : $vB = 0$, entonces

$$vB = 0, vAB = \lambda vB = 0, vA^2 B = \lambda^2 vB = 0, \dots, vA^{n-1} B = \lambda^{n-1} vB = 0$$

y por lo tanto $vC(A, B) = 0$ lo cual implica que la matriz de controlabilidad no es invertible y el sistema no es controlable.

q.e.d.

Ejercicio

Probar que las condiciones dadas en el teorema anterior no dependen de las coordenadas.

Ejercicio

Aplicar el test PBH a un sistema cuya matriz es diagonal: $X' = DX + Bf(t)$.

Demostrar que es controlable si y sólo si los autovalores son todos distintos y el vector B no tiene ninguna coordenada nula.

Ejercicio

a) Aplicar el test PBH a un sistema cuya matriz es un bloque de Jordan: $X' = J_r(\alpha)X + Bf(t)$.

Demostrar que es controlable si y sólo si la coordenada r -ésima de B es no nula.

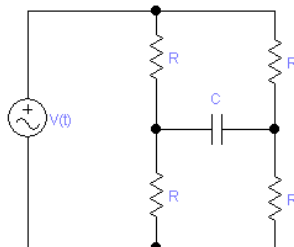
b) Aplicar el test PBH a un sistema cuya matriz es de Jordan: $X' = JX + Bf(t)$.

Supongamos que J tiene los bloques de Jordan $J_{r_1}(\alpha_1), \dots, J_{r_s}(\alpha_s)$.

Demostrar que es controlable si y sólo si $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ son distintos y las siguientes coordenadas de B : $b_{r_1}, b_{r_1+r_2}, \dots, b_{r_1+\dots+r_s}$ son no nulas.

Ejemplo 1

El siguiente sistema no es controlable, pues dada la simetría en que se encuentra el capacitor, si inicialmente está descargado, es imposible cargarlo actuando con un potencial de entrada.



Lo veremos con las fórmulas. Como hay un solo acumulador de energía el sistema es de orden 1.

Sean i_1 , i_2 las corrientes en las resistencias superiores, orientadas hacia abajo y v_C el potencial en el capacitor. La corriente en el capacitor i_C , orientada hacia la derecha, verifica: $i_1 + i_C = i_2$ y $C v_C' = i_C$.

$$R i_1 + v_C = R i_2 \quad R i_1 + R(i_1 - i_C) = V \quad v_C + R(i_2 + i_C) = R(i_1 - i_C)$$

Podemos despejar $R i_1$ de la primera y reemplazarlo en las dos últimas. De allí obtenemos la ecuación diferencial $R C v_C' + v_C = 0$ en la que no aparece el voltaje de entrada. Luego, si $v_C(0^-) = 0$ entonces $v_C(t) \equiv 0$, no importa qué entrada se proponga. La variable v_C está desvinculada de la entrada.

En este caso la matriz del sistema es de orden 1×1 : $A = -(RC)^{-1}$, $B = 0$ y $C(A, B) = 0$

Ejercicio.

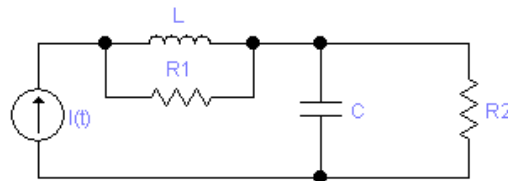
Supongamos que las resistencias son distintas y las numeramos así $\begin{pmatrix} R_1 & R_2 \\ R_3 & R_4 \end{pmatrix}$.

Demostrar que el sistema es controlable si y sólo si $R_1 R_4 \neq R_2 R_3$.

Esta condición rompe la simetría y el capacitor queda vinculado a la entrada.

Ejemplo 2

Consideremos el circuito de la figura en el cual la entrada es una corriente $I(t)$.



La corriente en la bobina i y el potencial en el capacitor v verifican el sistema

$$\begin{pmatrix} i' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{CR_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{R_1}{L} \\ \frac{1}{C} \end{pmatrix} I(t) \quad \text{y} \quad C(A, B) = \begin{pmatrix} \frac{R_1}{L} & -\frac{R_1^2}{L^2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C^2 R_2} \end{pmatrix}$$

El determinante de $C(A, B)$ es $\frac{R_1}{CL} \left(\frac{R_1}{L} - \frac{1}{CR_2} \right)$ y no es nulo si $CR_1 R_2 \neq L$.

Luego es controlable si y sólo si $CR_1 R_2 \neq L$.

La corriente en la bobina $i(t)$ y la tensión en el capacitor $v(t)$ verifican

$$\begin{pmatrix} i \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{1}{R_2 C} \end{pmatrix} V(t)$$

a) Para las constantes físicas $R_1 = R_2 = 1 \Omega$, $L = 1 H$, $C = 1 F$ el sistema es

$$\begin{pmatrix} i \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} V(t) \quad \text{y} \quad C(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto el circuito no es controlable.

b) Si en el circuito anterior ponemos resistencias de 2Ω en lugar de 1Ω las ecuaciones son

$$\begin{pmatrix} i \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} V(t) \quad \text{y} \quad C(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

y el circuito es controlable.

Por ejemplo, para alcanzar desde $\begin{pmatrix} i(0^-) \\ v(0^-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ el estado $\begin{pmatrix} i(0^+) \\ v(0^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

lo escribimos en la base B , AB

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \frac{16}{3} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

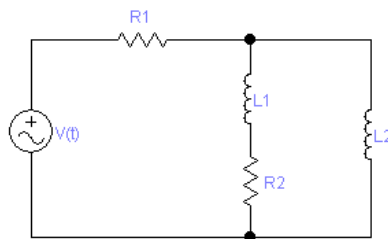
y con esas coordenadas introducimos el potencial instantáneo

$$V(t) = -\frac{2}{3} \delta(t) - \frac{16}{3} \delta'(t)$$

que lleva el sistema desde condiciones iniciales nulas a la posición deseada.

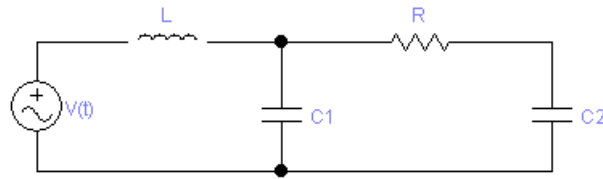
Ejercicio

En el circuito de la figura, escribir el sistema que satisfacen las corrientes en las bobinas y mostrar que siempre es controlable.



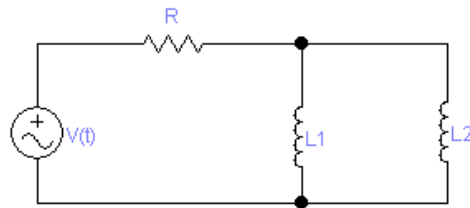
Ejercicio

En el circuito de la figura, sea i la corriente en la bobina, v_1 y v_2 los potenciales en los capacitores. Escribir el sistema que satisfacen y probar que siempre es controlable.



Ejercicio

Considere el circuito de la figura en el cual la entrada es un voltaje y hay dos bobinas en paralelo. Muestre que nunca es controlable pero que, si se reemplazan las bobinas por una equivalente resulta un sistema de primer orden controlable.



Ejercicio

Dos masas están unidas a tres resortes de igual constante k y se mueven horizontalmente sin fricción. Si se ejerce una fuerza horizontal sobre la primera masa, estudiar la controlabilidad instantánea.

Sistemas en forma no estándar

I) Sea el sistema lineal con la entrada derivada: $X' = A X + B_0 f + B_1 f'$.

Si h_1 es la respuesta causal al impulso unitario de $X' = A X + B_0 f$

y h_2 es la respuesta causal al impulso unitario de $X' = A X + B_1 f'$

entonces $h = h_1 + h_2'$ es la respuesta causal al impulso unitario de

$$X' = A X + B_0 f + B_1 f'.$$

Luego, para $f = \delta$ el sistema, desde el reposo, salta a $B_0 + A B_1$
 para $f = \delta'$ el sistema, desde el reposo, salta a $A(B_0 + A B_1)$
 y en general, para $f = \delta^{(k)}$ el sistema, desde el reposo, salta a $A^k(B_0 + A B_1)$.

Luego la controlabilidad instantánea del sistema no estándar $X' = A X + B_0 f + B_1 f'$
 es equivalente a la controlabilidad instantánea del sistema estándar $Y' = A Y + (B_0 + A B_1) f$

Otra manera de entender ésto es la siguiente.

Pasando de término en la ecuación $X' = A X + B_0 f + B_1 f'$ se obtiene

$$(X - B_1 f)' = A X + B_0 f = A (X - B_1 f) + (A B_1 + B_0) f$$

Con la variable $Y = X - B_1 f$ obtenemos

$$Y' = A Y + (A B_1 + B_0) f$$

II) Consideremos un sistema lineal con dos entradas $X' = A X + B_1 f_1(t) + B_2 f_2(t)$.

Determinamos la respuesta causal al impulso unitario para cada entrada por separado:

$$\begin{aligned} h_1' &= A h_1 + B_1 \delta(t) \quad , \quad h_1(0^-) = 0 \\ h_2' &= A h_2 + B_2 \delta(t) \quad , \quad h_2(0^-) = 0 \end{aligned}$$

Entonces, la respuesta partiendo del reposo, a las entradas simultáneas $f_1(t)$, $f_2(t)$, es la suma

$$X(t) = h_1 * f_1 + h_2 * f_2$$

pues: $X' = A (h_1 * f_1) + B_1 f_1 + A (h_2 * f_2) + B_2 f_2 = A X + B_1 f_1 + B_2 f_2$

Controlabilidad instantánea.

Disponemos de dos entradas para controlar. Si con ninguna de las dos por separado podemos controlarlo, puede ocurrir que juntas puedan controlarlo.

Los estados iniciales que podemos alcanzar, desde el reposo, con impulsos instantáneos aplicados en forma simultánea en ambas entradas, son las combinaciones lineales de las columnas de la matriz

$$C(A, B_1, B_2) = (B_1, A B_1, \dots, A^{n-1} B_1, B_2, A B_2, \dots, A^{n-1} B_2).$$

Es controlable instantáneamente si y sólo si las columnas de la matriz $C(A, B_1, B_2)$ generan \mathbb{R}^n , lo cual equivale a que la matriz sea de rango n , es decir, que tenga rango pleno.

Ejemplo

En el circuito de la figura hay dos capacitores C_1 , C_2 , una resistencia R y un potencial $V(t)$.

$$v \cdot v = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = 0$$

y por lo tanto son linealmente dependientes.

Hemos demostrado la equivalencia $a) \Leftrightarrow b)$ del teorema siguiente.

Teorema 5.4

Sean v_1, \dots, v_n vectores de un espacio vectorial E con producto punto. Son equivalentes:

- Los vectores son linealmente independientes.
- El gramiano $G = (\langle v_i, v_j \rangle)$ es invertible.
- La transformación lineal $T: [v_1, \dots, v_n] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $T(u) = (\langle v_1, u \rangle, \dots, \langle v_n, u \rangle)$, es un isomorfismo.

Demostración

Ya hemos demostrado que $a) \Leftrightarrow b)$.

$b) \Rightarrow c)$

Si el gramiano es invertible, veamos que $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^n$.

Dado $\xi \in \mathbb{R}^n$, buscamos $u = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$ tal que $T(u) = \xi$. Pero

$$T(u) = (\langle u, v_1 \rangle, \dots, \langle u, v_n \rangle) = (\sum_{k=1}^n c_k \langle v_k, v_1 \rangle, \dots, \sum_{k=1}^n c_k \langle v_k, v_n \rangle) = c G = \xi$$

Eligiendo $c = \xi G^{-1}$ obtenemos el u buscado. Por dimensión, el núcleo de T es nulo.

$c) \Rightarrow a)$ o la contrarecíproca $\sim a) \Rightarrow \sim c)$.

Supongamos que v_1, \dots, v_n son linealmente dependientes y sea $\sum_{k=1}^n c_k v_k = 0$ no trivial.

Para cada $u \in E$, $0 = \langle u, \sum_{k=1}^n c_k v_k \rangle = \sum_{k=1}^n c_k \langle u, v_k \rangle$ y por lo tanto $T(u)$ está en el hiperplano $\{(\xi_1, \dots, \xi_n) : \sum_{k=1}^n c_k \xi_k = 0\}$. Luego la $\text{Im}(T)$ no es todo \mathbb{R}^n .

q.e.d.

Ejemplo 1

r vectores $v_1 = (a_{11}, \dots, a_{1n})$, \dots , $v_r = (a_{r1}, \dots, a_{rn})$ de \mathbb{R}^n son linealmente independientes si y sólo si la matriz $r \times r$ $G = (\sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk})$ es invertible.

Sean $v_1 = (2, -1, 2, 1)$, $v_2 = (1, 1, 2, -3)$, $v_3 = (-2, 2, 1, 0)$ de \mathbb{R}^4 entonces

$$G(v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 10 & 2 & -4 \\ 2 & 15 & 2 \\ -4 & 2 & 9 \end{pmatrix} \text{ y como } \det(G) = 1002 \neq 0 \text{ son linealmente independientes.}$$

Ejemplo 2

Sean $x_1(t), \dots, x_n(t)$ funciones continuas en el intervalo finito y cerrado $[a, b]$, es decir, pertenecen al espacio con producto escalar $C[a, b]$. Su gramiano es

$$G = \left(\int_a^b x_i(t) x_j(t) dt \right)$$

Por el teorema anterior, las funciones son linealmente independientes si y sólo si su Gramiano es invertible si y sólo si la aplicación lineal

$$T : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad T(u) = \left(\int_a^b x_1(t) u(t) dt, \dots, \int_a^b x_n(t) u(t) dt \right)$$

tiene por imagen todo \mathbb{R}^n . Esto último equivale a que la ecuación vectorial

$$\vec{\xi} = \int_a^b \vec{x}(t) u(t) dt$$

para cada $\vec{\xi}$, tiene una solución $u(t) = c_1 x_1(t) + \dots + c_n x_n(t)$.

Las funciones $1, t, t^2, t^3$ son linealmente independientes en $C[0, 1]$; por lo tanto su gramiano

$$G(1, t, t^2, t^3) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \quad \text{es invertible}$$

y para cada $\xi \in \mathbb{R}^4$ la ecuación

$$\xi = \left(\int_0^1 u(t) dt, \int_0^1 t u(t) dt, \int_0^1 t^2 u(t) dt, \int_0^1 t^3 u(t) dt \right)$$

tiene solución en $\mathbb{P}_4[t]$.

Controlabilidad finita.

Un sistema de orden n $X' = AX + Bf(t)$ se dice **controlable finitamente** si, para cada vector de estados $C \in \mathbb{R}^n$ y cada lapso $t_1 > 0$, existe una entrada $f(t)$ continua en $0 \leq t \leq t_1$, de tal manera que la solución de $X' = AX + Bf(t)$, $X(0) = 0$, verifica $X(t_1) = C$.

Se tiene la respuesta al impulso unitario $h = \varphi(t) u(t)$ con $\varphi^T = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ solución de la ecuación homogénea tal que $\varphi(0) = B$. Partiendo del reposo, la solución para una entrada arbitraria $f(t)$, en el tiempo t_1 , es

$$X(t_1) = \int_0^{t_1} h(\tau) f(t_1 - \tau) d\tau = \begin{pmatrix} \int_0^{t_1} \varphi_1(\tau) f(t_1 - \tau) d\tau \\ \dots \\ \int_0^{t_1} \varphi_n(\tau) f(t_1 - \tau) d\tau \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Teorema 5.5

Un sistema es controlable instantáneamente si y sólo si es controlable finitamente.

Demostración

\Rightarrow)

Supongamos que es controlable instantáneamente.

Decir que es controlable finitamente equivale a decir que la transformación lineal

$$C[0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad f(t) \rightarrow X(t_1)$$

tiene imagen \mathbb{R}^n y ello equivale, según el teorema sobre el gramiano de la sección anterior, a que las funciones $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sean linealmente independientes.

El Wronskiano de $\varphi = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$ es la matriz cuadrada

$$W(\varphi)(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_1' & \dots & \varphi_1^{(n-1)} \\ \varphi_2 & \varphi_2' & \dots & \varphi_2^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_n & \varphi_n' & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Observemos que $W(\varphi)(0) = C(A, B) = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]$.

Como el sistema es controlable instantáneamente, la matriz $C[A, B]$ es invertible.

Si las funciones $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ fueran linealmente dependientes, existiría una combinación lineal no trivial $c_1 \varphi_1(t) + \dots + c_n \varphi_n(t) = 0$, y derivando varias veces obtenemos

$$c_1 \varphi_1^{(k)}(t) + \dots + c_n \varphi_n^{(k)}(t) = 0.$$

En particular, para $t=0$: $(c_1, \dots, c_n) \cdot W(\varphi)(0) = (c_1, \dots, c_n) \cdot C[A, B] = 0$, lo cual implica que la matriz $C(A, B)$ no es invertible contra lo supuesto. Luego $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$ son linealmente independientes, lo cual implica que el sistema es controlable finitamente.

\Leftarrow)

Recíprocamente, supongamos que el sistema es controlable finitamente.

Veamos que es controlable instantáneamente.

Sea c un vector tal que $0 = c \cdot C(A, B) = c \cdot W(\varphi)(0)$. Debemos demostrar que el vector c es nulo. Pero $c \cdot \varphi^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Por el teorema de Cayley-Hamilton $c \cdot \varphi^{(k)}(0) = 0$, para todo k . Como $\varphi(t)$ es una función vectorial suma finita de polinomios por exponenciales, se puede desarrollar en serie de Taylor

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \varphi^{(k)}(0) t^k$$

Multiplicando por el vector c se obtiene $c \cdot \varphi(t) = 0$.

Por ser controlable finitamente, para el vector c existe una entrada continua $f(t)$ tal que

$$X(t_1) = \int_0^{t_1} \varphi(t_1 - \tau) f(\tau) d\tau = c^T$$

Luego $\|c\|^2 = c \cdot c^T = c \int_0^{t_1} \varphi(t_1 - \tau) f(\tau) d\tau = \int_0^{t_1} c \varphi(t_1 - \tau) f(\tau) d\tau = 0$ y el vector c es nulo.

Ello implica que la matriz $C(A, B)$ es invertible y por lo tanto el sistema es controlable instantáneamente.

q.e.d.

Finalmente probaremos que en un sistema controlable se puede pasar de un estado a otro.

Teorema 5.6

Supongamos que el sistema $X' = A X + B f(t)$ es controlable finitamente.

Dados un estado inicial X_i , un estado final X_f y un lapso $t_1 > 0$, existe una entrada $f(t)$ continua en el intervalo $0 \leq t \leq t_1$ tal que, la solución de $X' = A X + B f(t)$, $X(0) = X_i$, verifica $X(t_1) = X_f$.

Demostración

Sea $Y(t)$ la solución del homogéneo: $Y' = A Y$ con la condición inicial $Y(0) = X_i$. En el tiempo t_1 se tiene $Y(t_1) = X_1$. Por ser controlable, existe $f(t)$ continua en $0 \leq t \leq t_1$, tal que la solución de $Z' = A Z + B f(t)$, $Z(0) = 0$ verifica $Z(t_1) = X_f - X_1$. Entonces $X(t) = Y(t) + Z(t)$ verifica $X' = A X + B f(t)$, $X(0) = X_i$, $X(t_1) = X_f$.

q.e.d.

Si un sistema es controlable y $h(t) = \varphi(t) u(t)$, veamos que $\varphi(t)$ tiene toda la información sobre el sistema.

a) Las funciones $\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)}$ son soluciones de la ecuación homogénea y son linealmente independientes pues dada una combinación lineal $\sum_{i=0}^{n-1} d_i \varphi^{(i)}(t) = 0$, si $D = (d_0, \dots, d_{n-1})$, se tiene

$$C(A, B) \cdot D^T = W(\varphi)(0) \cdot D^T = \sum_{i=0}^{n-1} d_i \varphi^{(i)}(0) = 0$$

y como $C(A, B)$ es invertible, es $D = 0$. Luego forman una base de soluciones.

b) Una solución del sistema no homogéneo es $(h * f)(t) = \int_0^t \varphi(\tau) f(t - \tau) d\tau$.

Coordenadas especiales para sistemas controlables

Consideremos una ecuación de orden n : $x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = f(t)$.

Con las variables de estado $x_1 = x, x_2 = x', \dots, x_n = x^{(n-1)}$ se escribe como sistema

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} f(t)$$

La matriz de controlabilidad es

$$C(A, B) = [B, AB, \dots, A^{n-1}B] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & * \\ 1 & * & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

que es invertible, y por lo tanto el sistema es controlable.

Recíprocamente, veamos que los sistemas lineales controlables admiten nuevas coordenadas, en las cuales tiene la forma anterior, y que además es equivalente a una ecuación de orden n respecto de alguna variable de estado. Hacemos las cuentas para sistemas 3×3 .

Si el sistema de orden 3 $X' = AX + Bf(t)$ es controlable entonces los vectores

$$v_1 = B, v_2 = Av_1, v_3 = Av_2$$

forman una base de \mathbb{R}^3 .

Consideramos la matriz invertible $M_1 = C(A, B)$ de cambio de coordenadas: $M_1 Y = X$

Si $Av_3 = -a_1 v_1 - a_2 v_2 - a_3 v_3$ en las nuevas coordenadas la matriz es

$$M_1^{-1} A M_1 = A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_1 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_3 \end{pmatrix} \text{ y poniendo } B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

el sistema se convierte en el equivalente

$$Y' = A_1 Y + B_1 f(t)$$

Hacemos otro cambio de variables con la matriz $M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 & 1 \\ a_3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$: $M_2 Z = Y$.

La matriz A_1 se transforma en su traspuesta:

$$M_2^{-1} A_1 M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M_2^{-1} B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En las variables Z el sistema toma la forma anunciada

$$Z' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix} Z + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} f(t)$$

Luego $z_1' = z_2$, $z_2' = z_3$, $z_3' = -a_1 z_1 - a_2 z_2 - a_3 z_3$

Si elegimos la variable de estado $x = z_1$ queda

$$x^{(3)} + a_1 x^{(2)} + a_2 x' + a_3 x = f(t)$$

De esta manera se ve que un sistema controlable es equivalente a una ecuación diferencial..

Estabilidad

Consideremos un sistema $X' = A X + B f(t)$.

Según se definió en el unidad anterior, se dice **internamente estable** si toda solución del sistema homogéneo asociado $X' = A X$, tiende a cero cuando el tiempo tiende a $+\infty$. En particular, si está en reposo y sufre una perturbación momentánea, vuelve al reposo. En este concepto de estabilidad no interviene el vector de entrada B . Se vio que hay estabilidad interna si y sólo si las raíces características de la matriz A tienen parte real menor que cero.

El sistema se dice **estable** si para cada entrada acotada $f(t)$ en $t \geq 0$, todas las soluciones son acotadas. Se suele decir que el sistema es **BIBO** por las iniciales en inglés de la frase "bounded intro, bounded output".

Si un sistema es internamente estable, para una entrada acotada $f(t)$, $t \geq 0$, las soluciones son

$$X(t) = (h * f)(t) + X_0(t) = \begin{pmatrix} h_1 * f \\ \dots \\ h_n * f \end{pmatrix} + X_0(t)$$

donde $X_0(t)$ es una solución del sistema homogéneo y cada componente $h_i * f$ es acotada. Por lo tanto, todas las soluciones resultan acotadas. Luego, internamente estable implica estable.

Respecto de la recíproca, estudiemos algunos ejemplos.

Ejemplo 1

Consideremos el sistema $X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} f(t)$

Las soluciones del homogéneo son $X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-2t}$ que muestra que no es estable internamente.

La respuesta al impulso unitario es $h(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-2t}$. Luego, partiendo del reposo, a una entrada acotada $f(t)$,

responde con la salida acotada $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-2t} * f(t)$.

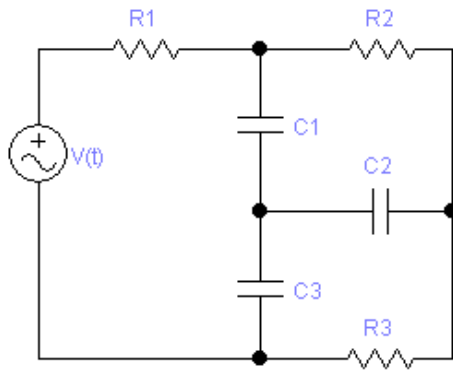
Pero, si las condiciones iniciales inesperadamente pasan a $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, la respuesta es

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-2t} * f(t)$$

con $c_1 \neq 0$ que no es acotada y la supuesta "estabilidad" es precaria.

Ejemplo 2

Consideremos el circuito de la figura.



Eligiendo las corrientes sobre R_1 , R_2 y C_2 hacia la derecha, la de R_3 hacia la izquierda, y sobre C_1 , C_3 hacia abajo, los voltajes en los capacitores verifican el sistema

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) & -\frac{1}{C_1 R_2} & -\frac{1}{C_1 R_1} \\ -\frac{1}{C_2 R_2} & -\frac{1}{C_2} \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) & \frac{1}{C_2 R_3} \\ -\frac{1}{C_3 R_1} & \frac{1}{C_3 R_3} & -\frac{1}{C_3} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1 R_1} \\ 0 \\ \frac{1}{C_3 R_1} \end{pmatrix} V(t)$$

En la matriz, la primera columna es la suma de las otras dos; por lo tanto tiene determinante nulo. Luego $\lambda = 0$ es un autovalor y el sistema no es internamente estable. Explicar físicamente esta conclusión. Tampoco es controlable. Analizamos el caso en que $R_1 = R_2 = R_3 = 1 \Omega$, $C_1 = C_2 = C_3 = 1 F$

$$X' = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} V(t) \quad \text{y} \quad C(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{Eigensystem} \left[A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \right]$$

$\{ \{-3, -3, 0\}, \{1, 0, 1\}, \{1, 1, 0\}, \{-1, 1, 1\} \}$

Las raíces características son $\lambda = -3, -3, 0$, las soluciones del homogéneo son

$$X_0(t) = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad h(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} u(t)$$

Para toda entrada acotada $V(t)$, la respuesta, partiendo del reposo, es $X(t) = h * V$, que es acotada, y sumándole soluciones del homogéneo, se ve que todas las soluciones son acotadas. Luego, el sistema es estable, pero no es internamente estable.

Para la entrada acotada $V(t) = 1$, que provoca resonancia, hay una salida constante $X_p(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ejemplo 3

En el sistema del ejemplo anterior, cambiamos el vector de entradas

$$X' = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} f(t)$$

Este sistema no es modelo, en principio, de un sistema físico.

A la entrada acotada $f(t) = 1$, que provoca resonancia, responde con la salida particular

$$X_p(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2-t \\ t \\ t \end{pmatrix}$$

que no es acotada. Sumándole soluciones del homogéneo, que son acotadas, se obtienen todas las soluciones posibles, que resultan no acotadas.

Ejercicio

Estudie la estabilidad del sistema $X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} f(t)$.

Convolucionando con la $h(t)$, halle la respuesta a la entrada constante 1.

6. OBSERVABILIDAD

En todo este párrafo consideremos un sistema lineal de orden n con una entrada y una salida

$$\begin{cases} X' = A X + B f(t) \\ y = C X + d f(t) \end{cases}$$

Supongamos que se comienza con una condición inicial $X(0) = X_0$ desconocida.

Si observamos la entrada $f(t)$ y la salida $y(t)$ durante un lapso no nulo $0 \leq t \leq t_1$,

¿ es posible conocer $X(t)$? Si es posible se dice que el sistema con esa salida es **observable**.

Para ello es necesario que cada variable de estado "afecte" la salida de tal manera que midiendo la salida y conociendo la entrada se puedan determinar todos los estados.

Es claro que basta con conocer el estado inicial $X(0) = X_0$, pues entonces resolviendo el sistema $X' = A X + B f(t)$, $X(0) = X_0$, obtenemos $X(t)$.

Derivando sucesivamente la salida

$$\begin{aligned}
 y &= C X + d f \\
 y' &= C X' + d f' = C(A X + B f) + d f' = C A X + C B f + d f' \\
 y'' &= C A X' + C B f' + d f'' = C A^2 X + C A B f + C B f' + d f'' \\
 &\dots\dots
 \end{aligned}$$

y evaluando en 0 y despejando, se obtienen las ecuaciones siguientes, en las que los miembros derechos son conocidos,

$$\begin{aligned}
 C X_0 &= y(0) - d f(0) \\
 C A X_0 &= y'(0) - C B f(0) - d f'(0) \\
 C A^2 X_0 &= y''(0) - C A B f(0) - C B f'(0) - d f''(0) \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

Luego el problema es, si conociendo los números $C A^k X_0 = d_k$, se puede conocer X_0 .

Por el teorema de Cayley-Hamilton, los primeros n números $C A^k X_0 = d_k$, $0 \leq k \leq n - 1$, permiten determinar los demás. Luego, las condiciones las fijan las primeras n ecuaciones.

Con la matriz cuadrada $O(C, A)$, cuyas filas son $C, C A, \dots, C A^{n-1}$, y el vector D de datos conocidos d_0, \dots, d_{n-1} queda planteado el sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas

$$O(C, A) X_0 = D$$

que es compatible, pues se comienza el proceso en algún estado inicial X_0 desconocido.

Si la matriz $O(C, A)$ es invertible se puede despejar la única solución X_0 ; pero si no es invertible, el sistema tiene infinitas soluciones, y es imposible averiguar el estado inicial.

Esta matriz se llama "matriz de observabilidad" del sistema. Hemos demostrado el siguiente.

Teorema 6.1

Un sistema es observable si y sólo si la matriz de observabilidad $O(C, A)$ es invertible.

Ejercicio

Si se miden dos salidas $y_1 = C_1 X + d_1 f$ e $y_2 = C_2 X + d_2 f$ del sistema $X' = A X + B f$,

probar que es observable si y sólo si la matriz de orden $2n \times n$ $\begin{pmatrix} O(C_1, A) \\ O(C_2, A) \end{pmatrix}$ tiene rango n .

Teorema 6.2

La observabilidad es independiente del sistema de coordenadas empleado.

Demostración

Si cambiamos de coordenadas $X = M Y$, el nuevo sistema es

$$\begin{cases} Y' = M^{-1} A M X + M^{-1} B \\ y = C M Y + d f(t) \end{cases}$$

y la nueva matriz de observabilidad es

$$O(CM, M^{-1}AM) = \begin{pmatrix} CM \\ CAM \\ \dots \\ CA^{n-1}M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} M = O(C, A)M$$

Como M es invertible, $O(C, A)M$ es invertible si y sólo si lo es $O(C, A)$.

q.e.d.

Teorema 6.3 Test PBH de observabilidad (Popov-Belevitch-Hautus)

Un sistema no es observable si y sólo si existe un autovector $v \neq 0$ a derecha de A :

$Av = \lambda v$ que es ortogonal a C : $Cv = 0$.

Demostración

Hacemos una demostración similar a la dada para el test PBH de controlabilidad.

\Rightarrow)

Si no es observable existe $w \neq 0$ tal que $O(C, A)w = 0$ o sea

$Cw = 0, CAw = 0, \dots, CA^{n-1}w = 0$ y por el teorema de Cayley-Hamilton

resulta $CA^k w = 0$ para todo $k \geq 0$. Luego el subespacio ortogonal a w , que es no nulo, es invariante por A ; por lo tanto existe un autovector $v \neq 0$ de A en ese subespacio.

\Leftarrow)

Si existe un vector v no nulo tal que $Av = \lambda v, Cv = 0$, entonces

$$CAv = C\lambda v = \lambda Cv = 0, \dots, CA^k v = C\lambda^k v = \lambda^k Cv = 0,$$

y por lo tanto $O(C, A)v = 0, v \neq 0$, y la matriz de observabilidad no es invertible.

q.e.d.

Teorema 6.4

Un sistema de orden n no es observable a través de la salida y si y sólo si y satisface una ecuación diferencial de orden menor que n .

Demostración

⇒)

Supongamos que no es observable; las filas de la matriz de observabilidad son linealmente dependientes, por lo tanto, alguna de ellas es combinación lineal de las anteriores

$$C A^k + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j C A^j = 0 \quad \text{con } 1 \leq k < n.$$

Veamos que $y = C X + d f(t)$ satisface una ecuación de la forma

$$y^{(k)} + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j y^{(j)} = \sum_{j=0}^k \beta_j f^{(j)}(t)$$

Supongamos por comodidad que $k = 2$: $C A^2 + \alpha_1 C A + \alpha_0 C = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} y' &= C X' + d f' = C (A X + B f) + d f' = C A X + C B f + d f' \\ y'' &= C A X' + C B f' + d f'' = C A (A X + B f) + C B f' + d f'' \\ &= C A^2 X + C A B f + C B f' + d f'' \\ &= -\alpha_1 C A X - \alpha_0 C X + C A B f + C B f' + d f'' \\ &= -\alpha_1 (y' - C B f - d f') - \alpha_0 (y - d f) + C A B f + C B f' + d f'' \end{aligned}$$

Luego $y'' + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = \alpha_1 (C B f + d f') + \alpha_0 d f + C A B f + C B f' + d f''$.

⇐)

Recíprocamente, si y satisface una ecuación de orden menor veamos que el sistema no es observable. Supongamos que satisface la ecuación $y'' + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = \beta_2 f'' + \beta_1 f' + \beta_0 f$.

Vamos a demostrar que $C A^2 + \alpha_1 C A + \alpha_0 C = 0$.

Consideremos $f(t) = 0$, y entonces el sistema es homogéneo $X' = A X$, $y = C X$.

Para cada solución del homogéneo $X(t)$ se tiene

$$y(t) = C X(t), \quad y'(t) = C X'(t) = C A X(t), \quad y''(t) = C A^2 X(t).$$

Reemplazados en la ecuación $y'' + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = 0$ dan la igualdad

$$(C A^2 + \alpha_1 C A + \alpha_0 C) X(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad (C A^2 + \alpha_1 C A + \alpha_0 C) X(0) = 0$$

Elegimos una base de soluciones del homogéneo $X_1(t), \dots, X_n(t)$ y por lo tanto $X_1(0), \dots, X_n(0)$ es una base de \mathbb{R}^n . Luego

$$(C A^2 + \alpha_1 C A + \alpha_0 C) X_i(0) = 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, n$$

por lo tanto el vector $C A^2 + \alpha_1 C A + \alpha_0 C$ es ortogonal a todos los vectores de una base y por lo tanto es nulo. Esto significa que las filas de la matriz de observabilidad son linealmente dependientes.

q.e.d.

Teorema 6.5

Consideremos la ecuación de la salida y en un sistema controlable

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b_1 f^{(n-1)} + \dots + b_n f + d(f^{(n)} + a_1 f^{(n-1)} + \dots + a_n f)$$

y sean los polinomios asociados $p_A(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$ y $q(\lambda) = b_1 \lambda^{n-1} + \dots + b_n$.

El sistema es observable si y sólo si los polinomios $p_A(\lambda)$ y $q(\lambda)$ no tiene raíz en común.

Demostración

Por claridad, supongamos que $n = 3$.

Como el sistema es controlable, se pueden elegir las variables en las cuales el sistema luce así

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} f(t), \quad y = (c_1, c_2, c_3) X + d f(t)$$

Tanto los polinomios $p_A(\lambda)$, $q(\lambda)$ como la observabilidad y la controlabilidad no dependen del sistema de coordenadas, y entonces podemos razonar sobre esta forma del sistema.

No es difícil ver que la ecuación de la salida es

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = c_3 f''' + c_2 f'' + c_1 f' + d(f'' + a_1 f' + a_2 f + a_3 f)$$

y por lo tanto $q(\lambda) = c_3 \lambda^2 + c_2 \lambda + c_1$.

Si las raíces características de A son $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ entonces, según se demostró en la unidad 1, las raíces características de $q(A)$ son $q(\alpha_1), q(\alpha_2), q(\alpha_3)$. Por lo tanto $\det q(A) = q(\alpha_1) q(\alpha_2) q(\alpha_3)$.

Luego $p_A(\lambda)$ y $q(\lambda)$ tienen una raíz común si y sólo si $\det q(A) = 0$, o sea, $q(A)$ no es invertible.

Demostremos que la matriz de observabilidad $O(C, A)$ es justamente $q(A)$, lo cual concluirá la

demostración. En efecto, sea la base canónica $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Entonces

$$e_1 A = e_2, \quad e_2 A = e_3 \Rightarrow e_1 A^2 = e_3$$

$$e_1 \cdot q(A) = e_1 (c_3 A^2 + c_2 A + c_1 I) = c_3 e_3 + c_2 e_2 + c_1 e_1 = C$$

$$e_2 \cdot q(A) = e_2 (c_3 A^2 + c_2 A + c_1 I) = e_1 A (c_3 A^2 + c_2 A + c_1 I) = e_1 (c_3 A^2 + c_2 A + c_1 I) A = C A$$

$$e_3 \cdot q(A) = e_3 (c_3 A^2 + c_2 A + c_1 I) = e_1 A^2 (c_3 A^2 + c_2 A + c_1 I) = e_1 (c_3 A^2 + c_2 A + c_1 I) A^2 = C A^2$$

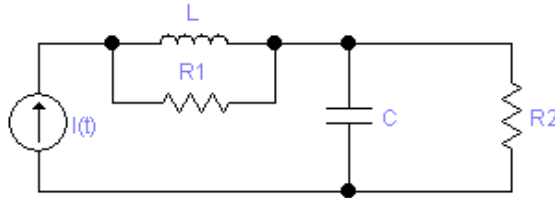
Por lo tanto

$$q(A) = I q(A) = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} q(A) = \begin{pmatrix} C \\ C A \\ C A^2 \end{pmatrix} = O(C, A)$$

q.e.d.

Ejemplo 1

En el circuito de la figura la entrada es una corriente $I(t)$ y la salida es la caída de potencial en la segunda resistencia.



Las variables i_L y v_C satisfacen el sistema

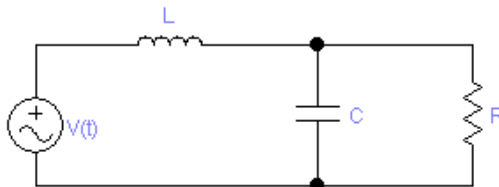
$$\begin{pmatrix} i_L' \\ v_C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_1}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{CR_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_L \\ v_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{R_1}{L} \\ \frac{1}{C} \end{pmatrix} I(t)$$

e $y(t) = v_{R_2} = v_C = (0, 1) \begin{pmatrix} i_L \\ v_C \end{pmatrix}$ y $\mathcal{O}(C, A) = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{CR_2} \end{pmatrix}$ no es invertible.

Luego el sistema no es observable a través de esa salida. Es decir, midiendo la entrada y la salida durante un lapso no nulo, no es posible saber en qué estado inicial comenzó a funcionar el sistema.

Ejemplo 2

En el circuito de la figura consideramos como salida la caída de potencial en la resistencia.



Las variables i_L y v_C satisfacen el sistema $\begin{pmatrix} i_L' \\ v_C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_L \\ v_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix} V(t)$

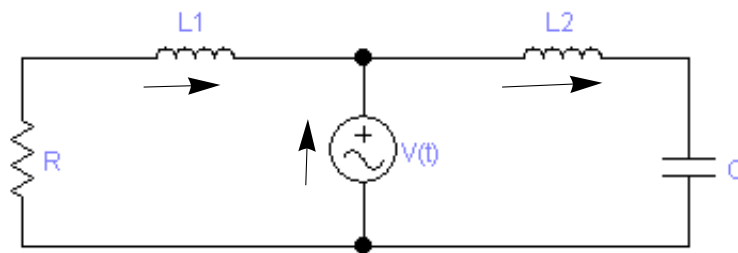
Además $y(t) = v_R = v_C = (0, 1) \begin{pmatrix} i_L \\ v_C \end{pmatrix}$ y $\mathcal{O}(C, A) = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix}$

La matriz de observabilidad es invertible y el sistema resulta observable desde esa salida.

Ejercicio

En el circuito de la figura, la entrada es un voltaje $V(t)$ y las flechas indican el sentido de las corrientes. Utilizando como variables de estado las corrientes en las bobinas i_1 , i_2 y el potencial en el capacitor v ,

- estudiar la estabilidad y controlabilidad; explicar su significado físico;
- hallar la ecuación de la salida $y = v_R$ y estudiar la observabilidad;
- hallar la ecuación de la salida $y = v_{L_1} + v_{L_2}$ y estudiar la observabilidad;
- para $R = 1 \Omega$, $L_1 = L_2 = 1 H$, $C = 1 F$, $V(t) = \sin t$, demostrar que cada respuesta es no acotada.

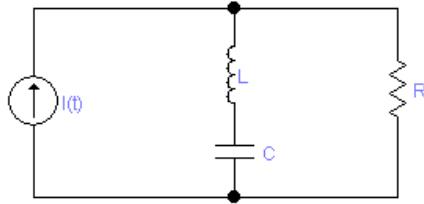


EJERCICIOS

- Si $x_\epsilon(t)$ es la solución de $\begin{cases} a x' + b x = e_\epsilon(t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$ demostrar que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} x_\epsilon(t) = \frac{1}{a} e^{-\frac{b}{a}t} u(t)$.
- Sea la ecuación $x'' + 2x' + x = f(t)$ con las condiciones iniciales $x(0) = x'(0) = 0$.
 - Encontrar la función respuesta al impulso unitario partiendo del reposo $h(t)$ y graficarla.
 - Calcular la respuesta al escalón unitario $u(t)$ partiendo del reposo y comprobar que tiene derivada continua pero que la derivada segunda tiene un salto en $t = 0$. Graficarla.
 - Estudiar la respuesta para $f(t) = u(t) - u(t - 1)$ partiendo del reposo y graficarla.
- a) Graficar $v(t) = \begin{cases} A & \text{si } \alpha < t < \beta \\ 0 & \text{en los otros } t \end{cases}$ siendo $\alpha < \beta$ Expresar $v(t)$ con $u(t)$.

b) Graficar $\text{sat}(t) = \begin{cases} t & \text{si } -1 \leq t \leq 1 \\ -1 & \text{si } t \leq -1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$ ("función saturación")

4. a) Probar que las funciones $\varphi(t)$ muy buenas forman un espacio vectorial.
 b) Probar que si $\varphi(t)$ es muy buena y $f(t)$ tiene infinitas derivadas, por ejemplo un polinomio, entonces $\varphi(t)f(t)$ es muy buena.
5. Partiendo del reposo hallar la respuesta $h(t)$ al impulso unitario y la respuesta $g(t)$ al escalón unitario de las siguientes ecuaciones estables y graficarlas:
 a) $x' + 2x = f(t)$ b) $x'' + 4x' + 5x = f(t)$
 c) $2x'' + 3x' + x = f(t)$ d) $4x'' + 3x' + x = f(t)$
 En cada caso determinar la solución para $f(t) = e(t)$ y $t e(t)$.
6. Calcular las derivadas siguientes: $(|t|)'$, $(|t|)''$, $e'(t)$, $(\text{sen } t u(t))'$, $\Lambda'(t)$ y graficarlas.
7. a) Si $f(t)$ es una función continua demostrar que $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$.
 b) Si $f(t)$ tiene derivada continua demostrar que
 $(f(t)\delta(t))' = f'(t)\delta(t) + f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t)$
8. Calcular y graficar $(e * e) * e$ y ver que tiene derivada continua.
9. a) Si $x(t)$ es la solución de la ecuación homogénea $ax' + bx = 0$ con $x(0) = \frac{1}{a}$,
 comprobar usando la derivada generalizada que $h(t) = x(t)u(t)$.
 b) Si $x(t)$ es la solución de $ax'' + bx' + cx = 0$, con $x(0) = 0$, $x'(0) = \frac{1}{a}$, comprobar
 usando la derivada generalizada que $h(t) = x(t)u(t)$.
10. Calcular y graficar las siguientes convoluciones:
 a) $e(t) * e(t)$ b) $u(t) * r(t)$ c) $e(t) * \Lambda(t)$ d) $\Lambda'(t) * \Lambda'(t)$ e) $e(t) * e(t - 2)$
 f) $E_a(t) * E_b(t)$ para $a = b$ y $a \neq b$. g) $\text{sat}(t) * e(t)$ h) $[(1 - 0.5t)e(0.5t)] * t e(t)$
11. Averiguar si tienen sentido las siguientes convoluciones y en caso afirmativo calcularlas:
 a) $e^{-|t|} * u(t)$ b) $\text{sat}(t) * u(t)$ c) $(\text{sat}(t) + 1) * u(t)$ d) $u(t) * u(-t)$
12. Probar que la convolución es conmutativa, asociativa y distributiva respecto de la suma.
 Comprobar esas propiedades con:
 $u(t) * \Lambda(t)$, $u(t) * e(t) * \Lambda(t)$, $e(t) * [\Lambda(t) - u(t)]$
13. Si $h(t)$ es la respuesta al impulso unitario de $\mathcal{L}(x) = f(t)$ partiendo del reposo, averiguar cuál es la respuesta a $f(t) = 4\delta(t - 1)$, $f(t) = -2\delta(t) + 3\delta(t + 1)$ y $f(t) = \delta'(t)$.
14. a) Hallar la respuesta de $x'' + 4x = \Lambda(t - 1)$ si hay reposo inicial.
 b) Hallar la respuesta de $x'' + 2x' + x = 2\delta(t) - \delta'(t)$ partiendo del reposo.
15. Considere el circuito siguiente donde la entrada es una corriente $I(t)$.



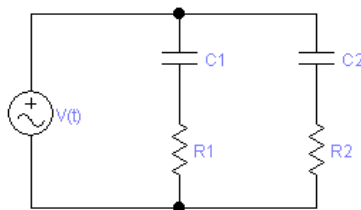
- a) Obtener la ecuación que verifica la corriente en la resistencia.
 b) Para $L = 0.25 H$, $R = 1 \Omega$, $C = 0.5 F$ encontrar la respuesta al impulso unitario, la respuesta a $I(t) = 10 u(t)$ A y a $I(t) = e^{-t} u(t)$ A partiendo del reposo.
16. a) Sean $f(t)$ y $g(t)$ dos funciones, ambas pares o ambas impares. Probar que $f * g$ es par.
 b) Sean $f(t)$ y $g(t)$ dos funciones, una par y otra impar. Probar que $f * g$ es impar.
 c) Ejemplificar cada caso.
17. Sean \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 dos operadores diferenciales lineales a coeficientes constantes. Probar que conmutan: $\mathcal{L}_1 \circ \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2 \circ \mathcal{L}_1$.
 Comprobarlo con $\mathcal{L}_1(x) = 2x'' + x' + 2x$ y $\mathcal{L}_2(x) = -x' + 3x$.
18. Probar que $(u * u)' = u * u' = u$ y $(u * e)' = u' * e = u * e'$
 Probar que $f * \delta' = f'$, $f * \delta'' = f''$ etc...
19. Sea $u_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 & \text{si } t \geq \frac{1}{n} \\ nt & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \end{cases}$. Demostrar que $u_n \rightarrow u$ y $u_n' \rightarrow \delta(t)$.
20. Hallar la respuesta al impulso unitario de $x'' + x' + x = 2f' + f$ si hay reposo inicial.
 Hallar la respuesta para $f(t) = \sin t u(t)$ partiendo del reposo.
21. Sea el sistema lineal $X' = AX + B \delta(t)$ con $X(0^-) = 0$.
 Escribir la respuesta al impulso unitario así: $h(t) = X_0(t)u(t)$ con $X_0(t)$ solución del homogéneo y demostrar que $X_0(0) = B$.
 En palabras: el sistema reacciona al impulso unitario saltando del reposo a la posición B y luego evoluciona libremente desde ese valor inicial.
- 22.a) Hallar la respuesta al impulso unitario del sistema $X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} f(t)$.
 Hallar la respuesta para $f(t) = e^{-t} u(t)$ con condiciones iniciales nulas. ¿Es controlable?
- b) Misma cuestión para el sistema $X' = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} f(t)$.

23. a) Para el circuito de la figura, mostrar que los voltajes en los capacitores verifican

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C_1 R_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_2 R_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1 R_1} \\ \frac{1}{C_2 R_2} \end{pmatrix} v(t)$$

b) Si la salida es la caída de potencial en la segunda resistencia, escribirla en términos de v_1 , v_2 , $v(t)$.

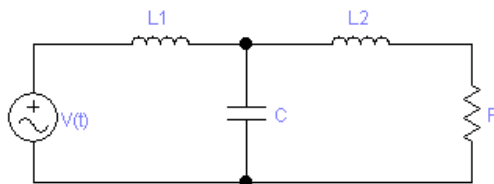
c) Averiguar cuándo es controlable y observable.



24. Consideremos el circuito de dos mallas como en la figura. Las bobinas son de valores distintos.

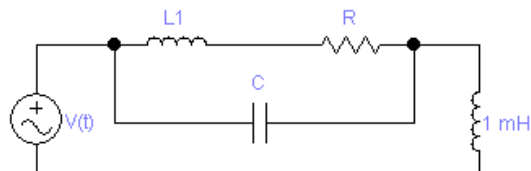
Tomando como variables las corrientes en las bobinas y la diferencia de potencial en el capacitor, hallar el sistema que verifican. La salida es la caída de potencial en la resistencia.

Estudiar la estabilidad, la controlabilidad y observabilidad del circuito.



25. Consideremos el circuito de dos mallas como en la figura. Tomando como variables las corrientes en las bobinas y la diferencia de potencial en el capacitor, hallar el sistema que verifican. La salida es la caída de potencial en la resistencia.

Estudiar la estabilidad, controlabilidad y observabilidad del circuito.

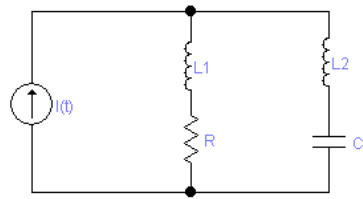


26. Consideremos el circuito de dos mallas como en la figura con una corriente de entrada $I(t)$.

La salida es la caída de potencial en la resistencia.

Tomando como variables las corrientes en las bobinas y la diferencia de potencial en el capacitor,

hallar el sistema que verifican. Estudiar la estabilidad, la controlabilidad y observabilidad del circuito.



27. Consideremos dos masas, que se mueven horizontalmente, un resorte y un amortiguador como en el esquema.
Se ejerce una fuerza horizontal en la segunda masa.
La salida es la diferencia entre las posiciones de las masas. Estudiar la controlabilidad, observabilidad y estabilidad.