MATEMÁTICA AVANZADA

Unidad 3: Transformada de Laplace
Problemas resueltos

Ingeniería en Automatización y Control Industrial
Universidad Nacional de Quilmes

2016

1. ***Resolución de ecuaciones diferenciales lineales mediante transformada de Laplace.***
   Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales usando transformada de Laplace.

   (a)

   $$\begin{aligned} &x'' + 2x' + x = 1 \\ &x(0) = -1 \\ &x'(0) = 2 \end{aligned}$$

   Aplicando la transformada de Laplace a ambos miembros se obtiene

   $$\begin{aligned} &2X(s) + s - 2 + 2sX(s) + 2 + X(s) = \frac{1}{s} \\ &X(s)(s^2 + 2s + 1) + s = \frac{1}{s} \\ &X(s) = \frac{1 - s^2}{s(s^2 + 2s + 1)} \end{aligned}$$

   Los polos de $X(s)$ son $s = 0$ y $s = -1$ doble, entonces la descomposición en fracciones simples es

   $$\frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{(s+1)^2}$$

   Operando se obtiene la siguiente expresión para el numerador.

   $$A(s+1)^2 + Bs(s+1) + Cs = 1 - s^2$$

   Para obtener los valores de A, B, C se opera algebraicamente teniendo en cuenta que la expresión anterior es una igualdad entre polinomios, en este caso de grado 2. Se llega a los siguientes resultados

   $$\begin{aligned} &A = 1 \\ &B = -2 \\ &C = 0 \end{aligned}$$

   Con estos valores la transformada de Laplace X(s) queda

   $$X(s) = \frac{1}{s} + \frac{-2}{s+1}$$

Regresando a la variable temporal, la solución de la ecuación queda

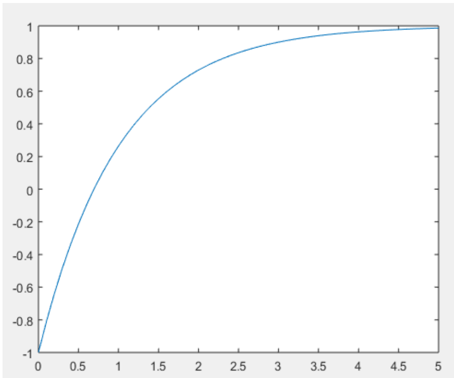
$$x(t) = (1 - 2e^{-t})u(t)$$

Tenemos dos formas de verificar la solución. Una es reemplazar $x(t)$ en la ecuación diferencial y verificar el resultado y la otra es utilizar el comando de 'dsolve' de MATLAB

```
>> x=dsolve('D2x=-2*Dx-x+1','x(0)=-1','Dx(0)=2')

x
 = 1 -2*exp(-t)
```

Para graficar la solución encontrada se utiliza la siguiente cadena de comandos

```
t=0:0.1:5; %vector de tiempo (es un vector de 0 a 5 con paso de 0.1)
x=1-2*exp(-t);%expresion a graficar
plot(t,x)%comando de ploteo
```



(b)

$$x'' + 2x' + x = e^{-2t}$$
$$x(0) = 0$$
$$x'(0) = -1$$

Nuevamente se aplica la transformada de Laplace a ambos miembros y se obtiene

$$X(s)(s^2 + 2s + 1) + 1 = \frac{1}{s+2}$$
$$X(s) = \frac{1 - (s+2)}{(s+2)(s^2 + 2s + 1)}$$
$$X(s) = \frac{-(s+1)}{(s+2)(s^2 + 2s + 1)}$$

Observemos que los polos de $X(s)$ son $s = -2$ y $s = -1$ doble, por lo tanto puede cancelarse un polo en $s = -1$ con el cero de X(s). Entonces la descomposición en fracciones simples es

$$X(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+1}$$

Operando se obtiene la siguiente expresión para el numerador.

$$A(s+1) + B(s+2) = -1$$

Trabajando sobre la igualdad para despejar A y B se llega a

$$A = 1$$
$$B = -1$$

Con estos valores la transformada de Laplace X(s) queda

$$X(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+1}$$

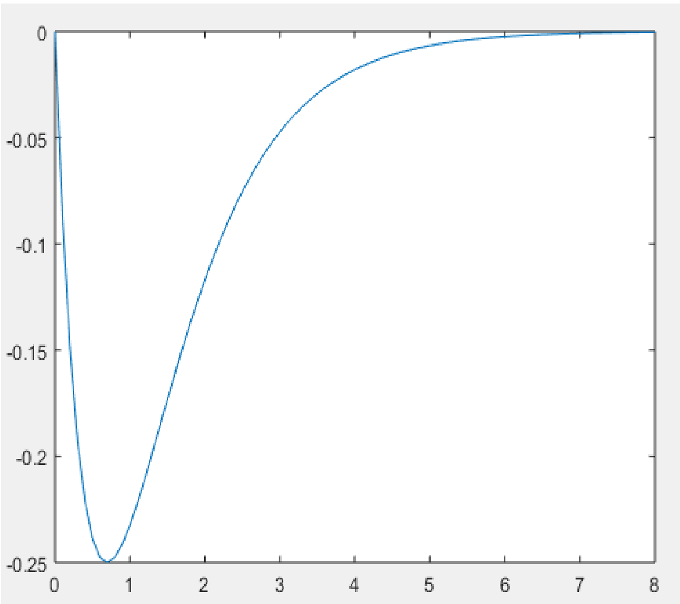
Regresando a la variable temporal, la solución de la ecuación queda

$$x(t) = (e^{-2t} - e^{-t})u(t)$$

Para verificar la solución encontrada, se utiliza el comando de 'dsolve' de MATLAB pero con algunos agregados más con respecto al problema anterior.

```
>> syms t;
x=dsolve('D2x=-2*Dx-x+exp(-2*t)','x(0)=0','Dx(0)=-1')

x =

exp(-2*t)*(t + 1) - t*exp(-2*t) - exp(-t)

>> simplify(x)

ans =

exp(-2*t) - exp(-t)
```

El gráfico de la solución se muestra a continuación



Recordar la condición inicial $x'(0) = -1$, indicador de que la variable está decreciendo, como se observa en el gráfico.

2. ***Derivada de la transformada.***
   Los siguientes ejercicios se resuelven aplicando la propiedad de la derivada de la transformada, indicada en el *Apunte de clase* como $L4$.

(a) Calcular la transformada de Laplace de

$$f(t) = \frac{(t)^n}{n!} e^{at}$$

Transformando la expresión utilizando la propiedad se obtiene

$$F(s) = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{1}{s-a} \right)^{(n)}$$

Si se calculan las derivadas primera, segunda y tercera de $\frac{1}{s-a}$ se obtienen

$$F(s) = -1 \frac{-1}{(s-a)^2} \text{ (Derivada 1ra)}$$

$$F(s) = \frac{1}{2} \frac{2}{(s-a)^3} \text{ (Derivada 2da)}$$

$$F(s) = \frac{-1}{6} \frac{-6}{(s-a)^4} \text{ (Derivada 3ra)}$$

Se ve que responde a la forma

$$F(s) = \frac{1}{(s-a)^{n+1}}$$

(b) Calcular la TL de

$$f(t) = te(t) \;\; y \;\; g(t) = te^{-t}u(t)$$

Primero se debe encontrar la transformada de Laplace de e(t) calculando por definición, es decir E(s).

$$E(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s}$$

Luego aplicar la propiedad

$$F(s) = -1 \left(\frac{1 - e^{-s}}{s} \right)'$$

$$F(s) = \frac{1 - e^{-s}(s+1)}{s^2}$$

Para $g(t)$ se procede de la misma forma

$$G(s) = (-1) \left(\frac{1}{s+1} \right)'$$

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

Se comprueba con la tabla de transformadas que el resultado es correcto.

3. ***Transformada de exponenciales complejas.***
Resolver las siguientes ecuaciones utilizando la TL.

(a)

$$x'' + x' + x = e^{-t}cost$$
$$x(0) = -1$$
$$x'(0) = 2$$

Primero se aplica la transformada de Laplace a ambos miembros

$$X(s)(s^2+s+1) - s - 1 = \frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$

$$X(s) = \left[\frac{s+1}{(s+1)^2+1} + s + 1\right]\frac{1}{s^2+s+1}$$

$$X(s) = \frac{(s+1)\left[2+(s+1)^2\right]}{(s^2+s+1)\left[(s+1)^2+1\right]}$$

Es necesario buscar los polos de $X(s)$ para saber de qué forma descomponer en fracciones simples. Por inspección de la tabla de transformadas, sabemos que el factor $[(s+1)^2+1]$ viene de una expresión con $e^{at}\operatorname{sen}(bt)$ y/o $e^{at}\cos(bt)$. Es necesario encontrar entonces las raíces de s^2+s+1.
En este caso ejemplificaremos cómo encontrar las raíces de un polinomio con el comando **roots()** de *MATLAB*. Dentro de los paréntesis deben colocarse los coeficientes del polinomio en orden descendente de potencias, dentro de corchetes y espaciados.Es decir si el polinomio fuera s^2+3s+4 los coeficientes serían $[1\,3\,4]$. En nuestro ejemplo, $[1\,1\,1]$.

```
>> roots([1 1 1])

ans =

-0.5000 + 0.8660i
-0.5000 - 0.8660i
```

Los polos estan ubicados en $s = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $s = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Por ser complejos, sabemos que al antitransformar aparecerán expresiones de la forma $e^{at}\operatorname{sen}(bt)$ y/o $e^{at}\cos(bt)$.
La descomposición en fracciones simples queda de la forma

$$X(s) = \frac{A(s+1)+B}{(s+1)^2+1} + \frac{C(s+\frac{1}{2}) + D\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

Operando sobre el numerador se obtiene la igualdad

$$[A(s+1)+B]\left[\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]+\left[C\left(s+\frac{1}{2}\right)+D\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\left[(s+1)^2+1\right] = (s+1)\left[2+(s+1)^2\right]$$

Para despejar las constantes se remplaza s por valores arbitrarios adecuados, que simplifiquen los cálculos. Con $s = -1+i$ se obtiene

$$(Ai+B)\left[\left(-\frac{1}{2}+i\right)^2+\frac{3}{4}\right] = i[2+(i)^2]$$
$$(Ai+B)(-i) = i$$
$$Ai+B = -1$$
$$A = 0$$
$$B = -1$$

Reemplazando $s = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ se obtiene $C = 1$ y $D = \sqrt{3}$. Entonces

$$X(s) = \frac{-1}{(s+1)^2+1} + \frac{(s+\frac{1}{2}) + \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}$$

Antitransformando se tiene la solución en el dominio del tiempo.

$$x(t) = -e^{-t}\operatorname{sen} t + e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

(b)

$$x'' + 3x' + 2x = e^{-t}cost$$
$$x(0) = 0$$
$$x'(0) = 0$$

Primero se aplica la transformada de Laplace a ambos miembros

$$X(s)(s^2+3s+2) = \frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$

$$X(s) = \frac{s+1}{[(s+1)^2+1]\,[s^2+3s+2]}$$

Notar que $s^2+3s+2 = (s+2)(s+1)$. Entonces puede realizarse una cancelación cero-polo.

$$X(s) = \frac{1}{[(s+1)^2+1]\,(s+2)}$$

Los polos están ubicados en $s = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $s = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ y $s = -2$.
La descomposición en fracciones simples queda de la forma

$$X(s) = \frac{A}{s+2} + \frac{B(s+1)+C}{(s+1)^2+1}$$

Operando sobre el numerador se obtiene la igualdad

$$A(s+2)\left[(s+1)^2+1\right] + [B(s+1)+C]\,(s+2) = 1$$

Remplazando $s = -1 + i$

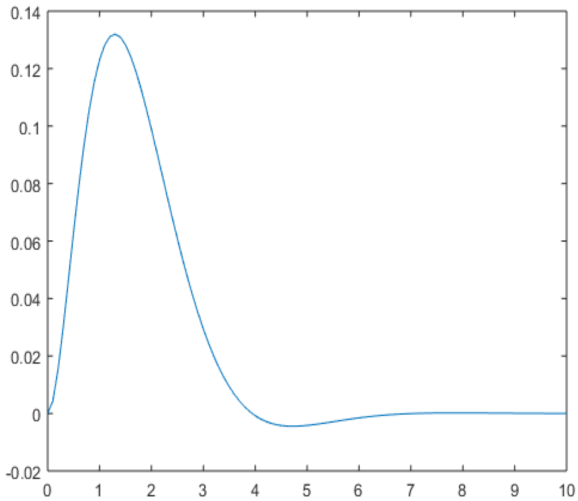
$$\begin{aligned}(Bi+C)(1+i) &= 1\\ Bi + C - B + Ci &= 1\\ B + C &= 0\\ B - C &= 1\\ B = -\frac{1}{2};\quad C =\frac{1}{2};&\quad A = \frac{1}{2};\end{aligned}$$

La solución $X(s)$ y su antitransformada $x(t)$ resultan

$$X(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s+2} + \frac{1-(s+1)}{(s+1)^2+1}\right)$$
$$x(t) = \left[\frac{1}{2}\left(e^{-2t} + e^{-t}(\operatorname{sen} t - \cos t)\right)\right]u(t)$$

Verificando de forma rápida con dsolve() y graficando la solución

```
>> x=dsolve('D2x=-3*Dx-2*x+exp(-t)*cos(t)','x(0)=0','Dx(0)=0')

x =

exp(-2*t)/2 + exp(-t)*sin(t) - (exp(-t)*(cos(t) + sin(t)))/2

t=0:0.1:10;
x=exp(-2*t)/2 + exp(-t).*sin(t) - (exp(-t).*(cos(t) + sin(t)))/2;

figure(1)
plot(t,x)
set(gcf,'Color','w')
```



(c)

$$x'' + 2x' + 2x = t$$
$$x(0) = 0$$
$$x'(0) = 1$$

Aplicando la transformada de Laplace a ambos miembros

$$X(s)(s^2 + 2s + 2) = \frac{1}{s^2} + 1$$

$$X(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2(s^2 + 2s + 2)}$$

Los polos son $s = 0$ (doble) y $s = -1 + i$, $s = -1 - i$. Por lo tanto la descomposición en fracciones simples es

$$X(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C(s+1) + D}{(s+1)^2 + 1}$$

Operando sobre el numerador se obtiene la igualdad

$$As\left[(s+1)^2 + 1\right] + B\left[(s+1)^2 + 1\right] + \left[C(s+1) + D\right]s^2 = s^2 + 1$$

Remplazando $s = -1 + i$

$$(Ci + D)(-1+i)^2 = (-1+i)^2 + 1$$
$$(Ci + D)(-2i) = -2i + 1$$
$$2C - 2iD = -2i + 1$$
$$C = \frac{1}{2}$$
$$D = 1$$

Remplazando $s = 0$

$$B = \frac{1}{2}$$

Remplazando $s = 1$

$$A = -\frac{1}{2}$$

La solución $X(s)$ queda entonces de la forma

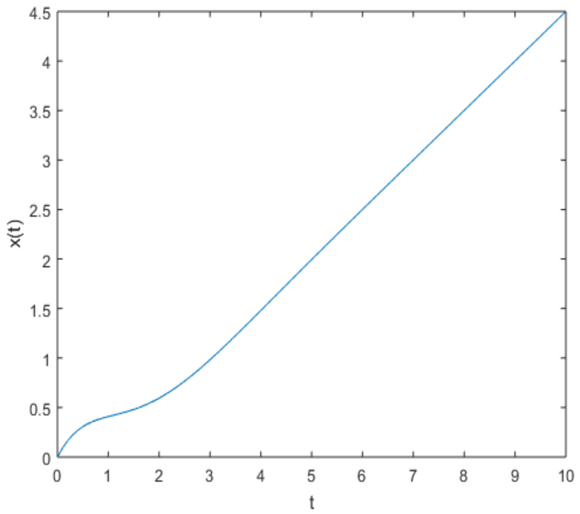
$$X(s) = \frac{-\frac{1}{2}}{s} + \frac{\frac{1}{2}}{s^2} + \frac{\frac{1}{2}(s+1)+1}{(s+1)^2+1}$$

O sea que $x(t)$ es

$$x(t) = \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t + e^{-t}\left(\frac{1}{2}\cos t + \sin t\right)\right] u(t)$$

Verificando de forma rápida con dsolve() y graficando la solución

```
>> syms t;
>> x=dsolve('D2x=-2*Dx-2*x+t','x(0)=0','Dx(0)=1')

x =

t/2 + (exp(-t)*cos(t))/2 + exp(-t)*sin(t) - 1/2
```



4. ***Otras transformadas para las cuales es útil la propiedad de la derivada. (L4)***

(a) **Transformadas de $\mathfrak{L}[t \operatorname{sen} t\; u(t)]$ y $\mathfrak{L}[t \cos t\; u(t)]$**

Calcular por definición estas transformadas puede ser complicado, por eso se va a utilizar nuevamente la *Propiedad 4 (L4)*.

$$\mathfrak{L}(t \operatorname{sen} t)u(t) = (-1)\left(\frac{1}{s^2+1}\right)' = (-1)\left[\frac{-2s}{(s^2+1)^2}\right] = \frac{2s}{s^4+2s^2+1}$$

$$\mathfrak{L}(t \cos t)u(t) = (-1)\left(\frac{s}{s^2+1}\right)' = (-1)\left[\frac{s^2+1-2s^2}{(s^2+1)^2}\right] = \frac{s^2-1}{s^4+2s^2+1}$$

(b) **Polos doble complejos**

Primero es necesario hallar la transformada de las exponenciales complejas y luego se aplica la *Propiedad 4 (L4)*de derivada. Las transformadas de las exponenciales resultan

$$\mathfrak{L}\left[e^{(a+ib)t}\right] = \frac{(s-a)+ib}{(s-a)^2+b^2}$$
$$\mathfrak{L}\left[e^{(a-ib)t}\right] = \frac{(s-a)-ib}{(s-a)^2+b^2}$$

Al aplicar la propiedad de derivada

$$(1) \quad \mathfrak{L}\left[te^{(a+ib)t}\right] = (-1)\left(\frac{(s-a)+ib}{(s-a)^2+b^2}\right)' = \frac{(s-a)^2-b^2+2ib(s-a)}{\left[(s-a)^2+b^2\right]^2}$$

$$(2) \quad \mathfrak{L}\left[te^{(a-ib)t}\right] = (-1)\left(\frac{(s-a)-ib}{(s-a)^2+b^2}\right)' = \frac{(s-a)^2-b^2-2ib(s-a)}{\left[(s-a)^2+b^2\right]^2}$$

Teniendo en cuenta que

$$te^{(a+ib)t} + te^{(a-ib)t} = 2te^{at}\cos bt$$
$$te^{(a+ib)t} - te^{(a-ib)t} = 2ite^{at}\operatorname{sen} bt$$

De la linealidad de la transformada de Laplace se deduce que

$$\mathfrak{L}[te^{at}\cos bt] = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{L}\left[te^{(a+ib)t}\right] + \mathfrak{L}\left[te^{(a-ib)t}\right]\right)$$
$$\mathfrak{L}[te^{at}\operatorname{sen} bt] = \frac{-i}{2}\left(\mathfrak{L}\left[te^{(a+ib)t}\right] - \mathfrak{L}\left[te^{(a-ib)t}\right]\right)$$

Entonces sumando (1) + (2) se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}[te^{at}\cos bt] &= \frac{1}{2}\left[\frac{2(s-a)^2-2b^2}{\left[(s-a)^2+b^2\right]^2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2(s-a)^2-2b^2+4b^2-4b^2}{\left[(s-a)^2+b^2\right]^2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2(s-a)^2+2b^2-4b^2}{\left[(s-a)^2+b^2\right]^2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{(s-a)^2+b^2} - \frac{4b^2}{\left[(s-a)^2+b^2\right]^2}\right] \\
\mathfrak{L}[te^{at}\cos bt] &= \frac{1}{(s-a)^2+b^2} - \frac{2b^2}{\left[(s-a)^2+b^2\right]^2}
\end{aligned}$$

Ahora realizando (1) - (2)

$$\mathfrak{L}[te^{at}\operatorname{sen} bt] = \frac{-i}{2}\left[\frac{-4ib(s-a)}{\left[(s-a)^2+b^2\right]^2}\right] = \frac{2b(s-a)}{\left[(s-a)^2+b^2\right]^2}$$

(c) Deducir la transformada

$$\mathfrak{L}\left(e^{at}\operatorname{sen} bt - tbe^{at}\cos bt\right)$$

Como ya se conocen las transformadas de los dos términos, solo es necesario restarlas, es decir

$$\mathfrak{L}\left(e^{at}\operatorname{sen} bt - tbe^{at}\cos bt\right) = \frac{b}{(s-a)^2+b^2} - b\left[\frac{1}{(s-a)^2+b^2} - \frac{2b^2}{[(s-a)^2+b^2]^2}\right]$$

$$= \frac{b[s-a)^2+b^2] - b[(s-a)^2+b^2] + 2b^3}{[(s-a)^2+b^2]^2}$$

$$= \frac{2b^3}{[(s-a)^2+b^2]^2}$$

5. ***Transformada de*** $\frac{f(t)}{t}$ ***(Propiedad L6)***
Hallar las siguientes transformadas y verificar que cumplen con la propiedad de anulación en infinito.

(a)

$$\mathfrak{L}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right) = \int_s^\infty \left(\frac{1}{r} - \frac{r}{r^2+1}\right) dr =$$

Es necesario integrar por sustitución el segundo término. Llamando $u = r^2 + 1$, se obtiene $dr = \frac{du}{2r}$, se llega a

$$\int_s^\infty \left(\frac{1}{r} - \frac{r}{r^2+1}\right) dr = \lim_{m\to\infty}\left[\ln r|_s^m - \frac{1}{2}\ \ln\left(r^2+1\right)|_s^m\right] = \lim_{m\to\infty}\left[\ln r|_s^m - \frac{1}{2}\ln\left(r^2+1\right)|_s^m\right]$$

$$= \ln\frac{\sqrt{s^2+1}}{s} + \lim_{m\to\infty}\ln\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}$$

El límite planteado es

$$\lim_{m\to\infty}\ln\frac{m}{\sqrt{m^2+1}} = \ln 1 = 0$$

Entonces, remplazando

$$\mathfrak{L}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right) = \ln\frac{\sqrt{s^2+1}}{s}$$

Verificación de la propiedad L5: Anulación en infinito

$$\lim_{s\to\infty}\mathfrak{L}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right) = \lim_{s\to\infty}\ln\frac{\sqrt{s^2+1}}{s} = 0$$

(b)

$$\mathfrak{L}\left(\frac{1-e^{-t}}{t}\right) = \int_s^\infty \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right) dr = \lim_{m\to\infty}\left[\ln r|_s^m - \ln\left(r+1\right)|_s^m\right]$$

$$= \lim_{m\to\infty} ln\frac{m}{m+1} - ln\frac{s}{s+1}$$

Resolviendo el límite

$$\lim_{m\to\infty} \ln \frac{m}{m+1} = ln1 = 0$$

Entonces la solución es

$$\mathfrak{L}\left(\frac{1-e^{-t}}{t}\right) = -lns + ln(s+1) = ln\frac{s+1}{s}$$

Verificación de la propiedad L5: Anulación en infinito

$$\lim_{s\to\infty} \mathfrak{L}\left(\frac{1-e^{-t}}{t}\right) = \lim_{s\to\infty} \ln \frac{s+1}{s} \; = \; 0$$

6. ***Atraso en el tiempo (Propiedad L8)***

Resolver

(a)

$$\begin{aligned} x' + x &= u(t) - 2u(t-1) + u(t-2) \\ x(0) &= 1 \\ sX(s) - 1 + X(s) &= \frac{1}{s} - \frac{2e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} \\ X(s) &= \left[\frac{1}{s} - \frac{2e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} + 1\right] \frac{1}{s+1} \\ X(s) &= \left[\frac{s+1}{s} - \frac{2e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s}\right] \frac{1}{s+1} \quad (**) \\ X(s) &= \frac{1}{s} - \frac{2e^{-s}}{s(s+1)} + \frac{e^{-2s}}{s(s+1)} \end{aligned}$$

En este paso es necesario separar en fracciones simples. El término $\frac{1}{s}$ tiene antitransformada de tabla ($u(t)$). Los otros dos términos deben separarse como sigue

$$\frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}$$

Obsérvese que los factores e^{-s} y e^{-2s} aparecen como consecuencia de desplazamientos en el tiempo, por lo que no deben ser considerados para la descomposición en fracciones simples. Es decir, para saber de qué función proviene $\frac{e^{-2s}}{s(s+1)}$ se antitransforma $\frac{1}{s(s+1)}$, y a la expresión obtenida se le aplica el atraso de dos unidades en el dominio del tiempo.

$$\begin{aligned} A(s+1) + Bs &= 1 \\ A + B &= 0 \\ A &= 1 \\ B &= -1 \\ X(s) &= \frac{1}{s} - 2\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right] e^{-s} + \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right] e^{-2s} \end{aligned}$$

$$x(t) = u(t) - 2u(t-1) + 2e^{-(t-1)}u(t-1) + u(t-2) - e^{-(t-2)}u(t-2)$$

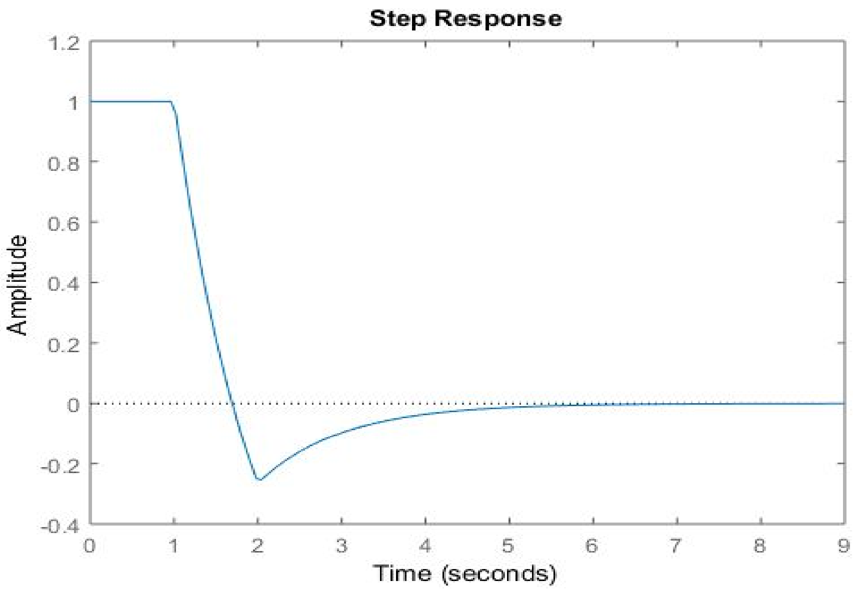
Vamos a graficar $x(t)$ usando *Matlab*. Graficar en función de t puede volverse complicado debido a que las funciones como $u(t)$ no están predefinidas en *Matlab* y entonces es necesario

crearlas. Vamos a utilizar un conjunto de librerías contenidas en el *Toolbox de control*. Aprovecharemos las propiedades de convolución para separar X(s) y crear una función G(s) que represente al sistema y sus condiciones iniciales para luego aplicarle la U(s) y simular su respuesta.
Si se oberva la ecuación marcada con (**), puede deducirse que

$$X(s) = \left[\frac{s+1}{s} - \frac{2e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s}\right]\frac{1}{s+1} = \left[\frac{s+1}{s+1} - \frac{2e^{-s}}{s+1} + \frac{e^{-2s}}{s+1}\right]\frac{1}{s}$$

Esto puede verse también como $X(s) = G(s)\ U(s)$. Matlab posee un comando $step()$ que simula la respuesta al escalón unitario $u(t)$. Es necesario definir G(s) y aplicarle el dicho comando. Todo esto se logra con el código detallado a continuación.

```
clear all
close all
clc

s=tf('s');  %Crea una variable s de tipo tf (transfer function)

num=s+1-2*exp(-s)+exp(-2*s);      %numerador de G(s)
den=[1 1];                        %denominador de G(s).[1 1] es s+1
G=tf(1,den)*num;                  %crea G(s)
step(G)                           %simula respuesta al escalón, U(s)G(s)
set(gcf,'Color','w')              %color de fondo del gráfico
```



(b)

$$x'' + 2x' + 2x = u(t) - u(t-1)$$
$$x(0) = 0$$
$$x'(0) = 0$$
$$X(s)(s^2 + 2s + 2) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-s}}{s}$$

$$X(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s(s^2 + 2s + 2)} = \left[\frac{A}{s} + \frac{B(s+1) + C}{(s+1)^2 + 1}\right](1 - e^{-s})$$

$$A\left[(s+1)^2 + 1\right] + Bs(s+1) + Cs = 1$$

Remplazando con $s = 0$ y $s = -1 + i$ se obtiene

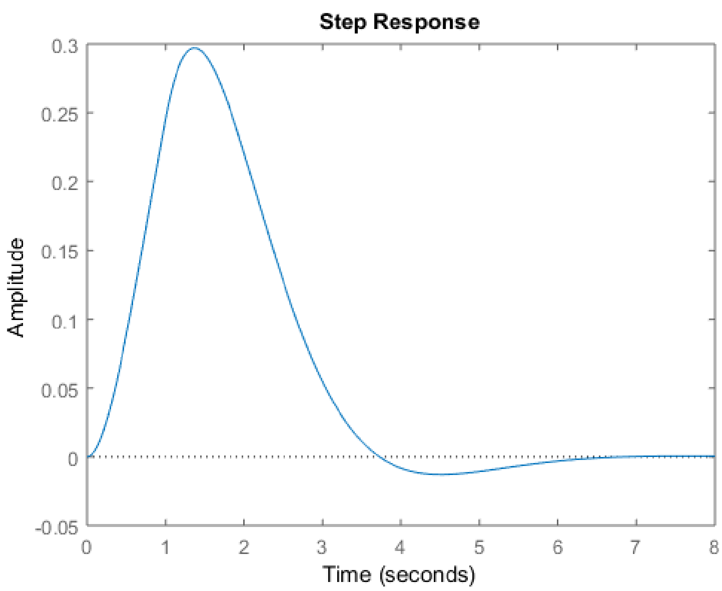
$$A = 1$$
$$B = -\frac{1}{2}$$
$$C = -\frac{1}{2}$$

Las soluciones X(s) y x(t) son

$$X(s) = \left[\frac{1}{s} - \frac{\frac{1}{2}(s+1) + \frac{1}{2}}{(s+1)^2 + 1}\right](1 - e^{-s})$$

$$x(t) = \left\{1 - \frac{1}{2}\left[e^{-t}(\cos t + \operatorname{sen} t)\right]\right\} u(t) - \left\{1 - \frac{1}{2}\left[e^{-(t-1)}(\cos(t-1) + \sin(t-1))\right]\right\} u(t-1)$$

La solución graficada utilizando el *Control toolbox* se muestra a continuación



7. ***Transformada de primitivas (Propiedad L9)***

Comprobar la igualdad $\mathfrak{L}\left(\int\limits_0^t e(\tau)d\tau\right) = \frac{1-e^{-s}}{s^2}$.

Esta igualdad se deriva de la propiedad $L9$, ya que

$$\mathfrak{L}\left(e(t)\right) = \frac{1-e^{-s}}{s}$$

Entonces, aplicando la propiedad citada,

$$\mathfrak{L}\left(\int\limits_0^t e(\tau)d\tau\right) = \frac{\mathfrak{L}\left(e(t)\right)}{s} = \frac{1-e^{-s}}{s^2}$$

Para verificarla, primero hay que resolver la integral $\int\limits_0^t e(\tau)d\tau$ y luego transformarla por definición. Entonces,

$$\int\limits_0^t e(\tau)d\tau = \begin{cases} t & si \quad 0 < t \leq 1 \\ 1 & si \quad\quad t \geq 1 \end{cases}$$

La transformada de Laplace de dicha función queda

$$\begin{aligned}\int\limits_0^1 te^{-st}\,dt + \int\limits_1^\infty e^{-st}\,dt &= -\left.\frac{te^{-st}}{s}\right|_0^1 - \left.\frac{e^{-st}}{s^2}\right|_0^1 - \left.\frac{e^{-st}}{s}\right|_1^\infty \\ &= -\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{1}{s^2} + \frac{e^{-s}}{s} \\ &= \frac{1-e^{-s}}{s^2}\end{aligned}$$

Se verifica así la *Propiedad L9*.

8. ***Ecuaciones de Convolución***

(a) $x(t) = 1 - \int\limits_0^t x(\tau)(t-\tau)d\tau$

Primero aplicamos la transformada de Laplace a ambos miembros y operamos para despejar X(s), y antitransformamos. Es decir

$$\begin{aligned}X(s) &= \frac{1}{s} - X(s)\frac{1}{s^2} \\ X(s)\left(1+\frac{1}{s^2}\right) &= \frac{1}{s} \\ X(s) &= \frac{s}{s^2+1} \\ x(t) &= \cos t\, u(t)\end{aligned}$$

Para verificar es necesario reemplazar $x(t)$ en el miembro derecho de la ecuación a)

$$1 - \int\limits_0^t x(\tau)(t-\tau)d\tau = 1 - \int\limits_0^t \cos\tau(t-\tau)d\tau = 1 - \left[\int\limits_0^t t\cos\tau d\tau - \int\limits_0^t \tau\cos\tau d\tau\right]$$

Es necesario integrar por partes (la segunda integral). Llamamos $u = \tau, du = d\tau, dv = \cos\tau, v = -\operatorname{sen}\tau$ y se obtiene

$$1 - \int_0^t x(\tau)(t-\tau)d\tau = 1 - \left[t \operatorname{sen}\tau|_0^t - \tau sen\tau|_0^t - \cos\tau|_0^t\right]$$
$$= 1 - [t\operatorname{sen}t - t\operatorname{sen}t - \cos t + 1]$$
$$= \cos t u(t) = x(t)$$

(b) $x(t) = \operatorname{sen}tu(t) + x(t) * u(t)$
Transformando por Laplace ambos miembros se obtiene

$$X(s) = \frac{1}{s^2+1} + X(s)\frac{1}{s}$$
$$X(s)\left(\frac{s-1}{s}\right) = \frac{1}{s^2+1}$$
$$X(s) = \frac{s}{(s^2+1)(s-1)}$$

separando en fracciones simples

$$X(s) = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C}{s-1}$$

Remplazando $s = 0$ se obtiene $B = C$ y con $s = i$ se obtiene

$$A(i)(i-1) + B(i-1) = i$$
$$A(-i-1) + B(i-1) = i$$
$$-A - B = 0$$
$$-A + B = 1$$
$$A = -\frac{1}{2};\ \ B = \frac{1}{2};\ \ C = \frac{1}{2}$$
$$X(s) = \frac{1}{2}\left[\frac{-s+1}{s^2+1} + \frac{1}{s-1}\right]$$
$$x(t) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}t - \cos t + e^t\right)u(t)$$

Para verificar la solución, reemplazamos $x(t)$ y realizamos la convolución.

$$x(t) * u(t) = \frac{1}{2}\int_0^t \left(\operatorname{sen}\tau - \cos\tau + e^\tau\right)d\tau = \frac{1}{2}\left(-\cos\tau|_0^t - \operatorname{sen}\tau|_0^t + e^\tau|_0^t\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\cos t + 1 - \operatorname{sen}t + e^t - 1\right) = \frac{1}{2}\left(-\cos t - \operatorname{sen}t + e^t\right)$$
$$\operatorname{sen}tu(t) + x(t) * u(t) = \left(\operatorname{sen}t + \frac{1}{2}\left(-\cos t - \operatorname{sen}t + e^t\right) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}t - \cos t + e^t\right)\right)u(t) = x(t)$$

Ecuaciones de Deconvolución

(a)

$$
\begin{aligned}
x(t) * \operatorname{sen} t &= t \\
X(s)\frac{1}{s^2+1} &= \frac{1}{s^2} \\
X(s) = \frac{s^2+1}{s^2} &= 1 + \frac{1}{s^2} \\
x(t) &= \delta(t) + tu(t)
\end{aligned}
$$

Aclaración: Una función de transferencia con polinomios del mismo grado en el numerador y denominador viene de una función generalizada. Por eso $X(s)$ se separa en términos y de esa forma se halla su antitransformada.

Verificamos

$$
\begin{aligned}
x(t) * u(t) &= \int_0^t \operatorname{sen}\tau\delta(t-\tau)d\tau + \int_0^t \operatorname{sen}\tau(t-\tau)d\tau \\
&= sent + t\int_0^t \operatorname{sen}\tau d\tau - \int_0^t \tau\operatorname{sen}\tau d\tau \\
&= \operatorname{sen} t + \left[-t\cos\tau|_0^t - \left(-\tau\cos\tau|_0^t + \operatorname{sen}\tau|_0^t\right)\right] \\
&= \operatorname{sen} t + (-t\cos t + t + t\cos t - \operatorname{sen} t) \\
x(t) * u(t) &= t
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
x(t) * u(t) &= te^{-t} \\
X(s)\frac{1}{s} &= \frac{1}{(s+1)^2} \\
X(s) &= \frac{s}{(s+1)^2} \\
X(s) &= \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+1)^2}
\end{aligned}
$$

Remplazando $s = 0$ se obtiene $A = -B$. Remplazando $s = 1$ se obtiene $A = 1$ y $B = -1$, por lo tanto $X(s)$ y $x(t)$ son

$$
X(s) = \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+1)^2}
$$

$$
x(t) = \left(e^{-t} - te^{-t}\right)u(t)
$$

Verificando

$$
\begin{aligned}
x(t) * u(t) &= \int_0^t \left(e^{-\tau} - \tau e^{-\tau}\right)d\tau = -e^{-\tau}\Big|_0^t - \left(-\tau e^{-\tau}\Big|_0^t - e^{-\tau}\Big|_0^t\right) = 1 - e^{-t} - \left(-te^{-t} - e^{-t} + 1\right) \\
x(t) * u(t) &= te^{-t}
\end{aligned}
$$

(c)

$$\cos t * x(t) = u(t)$$
$$\frac{s}{s^2+1}X(s) = \frac{1}{s}$$
$$X(s) = \frac{s^2+1}{s^2}$$
$$x(t) = \delta(t) + tu(t)$$

Verificando

$$x(t) * \cos t = \int_0^t \cos\tau\delta(t-\tau)d\tau + \int_0^t \cos\tau(t-\tau)d\tau = \cos t + t\int_0^t \cos\tau - \int_0^t \tau\cos\tau$$
$$u = \tau; \quad du = d\tau; \quad v = \cos\tau; \quad dv = \operatorname{sen}\tau;$$
$$= \cos t + \, t\operatorname{sen}\tau|_0^t - \left(\tau\operatorname{sen}\tau|_0^t - cos\tau|_0^t\right)$$
$$= \cos t + t\operatorname{sen} t - t\operatorname{sen} t - \cos t + 1$$
$$x(t) * \cos t = u(t)$$

9. ***Sistemas de ecuaciones lineales y transformada de Laplace***
Resolver el siguiente sistema de orden 2 mediante TL.

$$x' = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} u(t)$$

$$x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Transformando a ambos lados se obtiene

$$(sI - A)X(s) - x(0) = B\,U(s)$$
$$\begin{pmatrix} s+1 & 2 \\ -2 & s+1 \end{pmatrix} X(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} U(s)$$

Despejando se obtiene $X(s) = (sI - A)^{-1}\left[x(0) + B\,U(s)\right]$. Es necesario entonces calcular el polinomio característico y la matriz adjunta de $(sI - A)$.

$$P(s) = (s+1)^2 + 4$$
$$adj(sI - A) = \begin{pmatrix} s+1 & 2 \\ -2 & s+1 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} s+1 & -2 \\ 2 & s+1 \end{pmatrix}$$

Entonces $X(s) = \frac{adj(sI-A)}{P(s)}\left[x(0) + B\,U(s)\right]$. Remplazando con los valores correspondientes se obtiene

$$X(s) = \frac{1}{P(s)} \left[\begin{pmatrix} s+1 & -2 \\ 2 & s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s+1 & -2 \\ 2 & s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} U(s) \right]$$

$$X(s) = \frac{1}{P(s)} \left[\begin{pmatrix} s+1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s+3 \\ -s+1 \end{pmatrix} \frac{1}{s} \right]$$

$$X(s) = \frac{1}{P(s)} \left[\begin{pmatrix} \frac{s(s+1)+s+3}{s} \\ \frac{2s-s+1}{s} \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{P(s)} \begin{pmatrix} \frac{s^2+2s+3}{s} \\ \frac{s+1}{s} \end{pmatrix}$$

$$X_1(s) = \frac{s^2+2s+3}{s\left[(s+1)^2+4\right]}$$
$$X_2(s) = \frac{s+1}{s\left[(s+1)^2+4\right]}$$

El paso siguiente es separar en fracciones simples. X_1 y X_2 tienen el mismo modelo representado por un escalón, un seno y un coseno.

$$X_1(s) = \frac{A}{s} + \frac{B(s+1)+2C}{(s+1)^2+4}$$
$$X_2(s) = \frac{D}{s} + \frac{E(s+1)+2F}{(s+1)^2+4}$$

Analizamos $X_1(s)$, remplazamos $s=-1+2i$

$$A\left[(s+1)^2+4\right] + sB(s+1) + 2Cs = s^2+2s+3$$
$$B(-1+2i)(2i) + 2C(-1+2i) = (-1+2i)^2 + 2(-1+2i) + 3$$
$$B(-2i-4) + C(-2+4i) = -2$$

Igualando miembro a miembro parte real e imaginaria se tiene

$$(im) \quad -2B+4C = 0$$
$$(re) \quad -4B-2C = -2$$

Del sistema anterior se obtiene $C=\frac{1}{5}$ y $B=\frac{2}{5}$. Con $s=0$ se obtiene $A=\frac{3}{5}$. Entonces

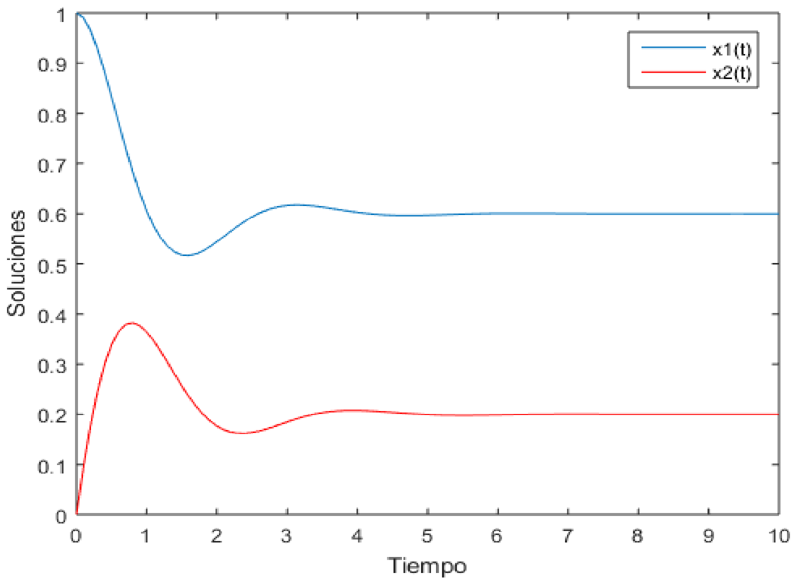
$$X_1(s) = \frac{\frac{3}{5}}{s} + \frac{\frac{2}{5}(s+1)+2\frac{1}{5}}{(s+1)^2+4}$$
$$x_1(t) = \frac{3}{5} + e^{-t}\left[\frac{2}{5}\cos 2t + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 2t\right]$$

Realizando el mismo procedimiento con $X_2(s)$, es decir $D\left[(s+1)^2+4\right]+sE(s+1)+2Fs = s+1$, se obtienen

$$D = \frac{1}{5}$$
$$E = -\frac{1}{5}$$
$$F = \frac{2}{5}$$

$$X_2(s) = \frac{\frac{1}{5}}{s} + \frac{-\frac{1}{5}(s+1) + 2\frac{2}{5}}{(s+1)^2 + 4}$$
$$x_2(t) = \frac{1}{5} + e^{-t}\left[-\frac{1}{5}\cos 2t + \frac{2}{5}\operatorname{sen} 2t\right]$$

Se puede comprobar que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ verifican las condiciones iniciales $x_1(0) = 1$ y $x_2(0) = 0$. Los gráficos de las soluciones se muestran a continuación



Resolución con MATLAB:A continuación se listan los comandos necesarios para encontrar $X_1(s)$ y $X_2(s)$. Luego los resultados

```
%Defino matrices y condiciones iniciales
A=[-1 -2;2 -1];
B=[1;-1];
x0=[1;0];

s=tf('s');
F=1/s;

%Calculo y muestro las funciones. El comando minreal simplifica.
%eye(size(A)) es una matriz identidad del tamaño de A

I=eye(size(A));
```

```
inversa=inv(s*I-A);
X=minreal(inversa*(x0+B*F))

X =

From input to output...
      s^2 + 2 s + 3
1:  -----------------
    s^3 + 2 s^2 + 5 s

          s + 1
2:  -----------------
    s^3 + 2 s^2 + 5 s

Continuous-time transfer function.
```