UNIVERSIDAD NACIONAL DE QUILMES
DEPARTAMENTO DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
MATEMÁTICA AVANZADA

UNIDAD 3 TRANSFORMADA DE LAPLACE

1. Noción de transformada de Laplace. Condición suficiente para su existencia.

2. Cálculo y propiedades.

3. Aplicación a las ecuaciones diferenciales.

4. Ecuaciones de convolución. Deconvolución.

5. Aplicación a sistemas de ecuaciones.

6. Ecuación de una salida.

NOCIÓN DE TRANSFORMADA DE LAPLACE

La transformada de Laplace de una función $f(t)$, dada en $t \geqslant 0$, se define por la integral

$$\mathfrak{L}(f)(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

y está definida para los números s para los cuales la integral converge.
La transformada de Laplace de una función $f(t)$ es entonces otra función $\mathfrak{L}(f)(s)$ definida para ciertos s.

Ejemplos

$\mathfrak{L}(1)(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, dt = \frac{1}{s}$, $s > 0$

$\mathfrak{L}(t)(s) = \int_0^\infty t\, e^{-st}\, dt = \frac{1}{s^2}$, $s > 0$

$\mathfrak{L}(e^{\alpha t})(s) = \int_0^\infty e^{\alpha t}\, e^{-st}\, dt = \frac{1}{s-\alpha}$, $s > \alpha$

$\mathfrak{L}(e(t))(s) = \int_0^1 e^{-st}\, dt = \frac{1-e^{-s}}{s}$, cualquier s

Una manera cómoda de anotar la trasformada de Laplace de una función es con la letra mayúscula correspondiente:

$$\mathfrak{L}(f)(s) = F(s), \quad \mathfrak{L}(g)(s) = G(s), \quad \mathcal{L}(x)(s) = X(s), \quad \text{etc.}$$

Para algunas funciones es posible saber que la integral converge absolutamente, usando el siguiente concepto.

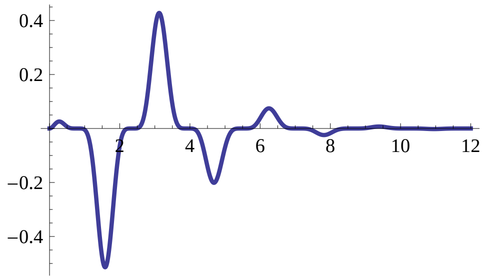
Definición

Se dice que una función $f(t)$, $t \geqslant 0$, tiene crecimiento a lo sumo exponencial si existen constantes $k > 0$ y $\alpha \geqslant 0$ tales que $|f(t)| \leqslant k\, e^{\alpha t}$ para $t \geqslant 0$.

Ejemplo

Estudiamos la función $t^2 \cos^5 2\, t$.

```
Plot[t^2 Cos[2 t]^5 e^-t, {t, 0, 12}, PlotRange → All, PlotStyle → {Thick}]
```



Para $t \geqslant 0$: $|t^2 \cos^5 2\, t| \leqslant t^2$ y $\lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{e^t} = 0 \Rightarrow t^2 \leqslant k\, e^t$ para una constante conveniente $k > 0$.

Luego la función $t^2 \cos^5 2\, t$ es de crecimiento a lo sumo exponencial.

Ejercicio

Probar que a) $|(t^3 - t) \operatorname{sen} t| \leqslant k\, e^t$ b) $|(1 - t + 3\, t^2)\, e^{2\, t}| \leqslant k\, e^{3\, t}$

Ejercicio

a) Probar que una función acotada tiene crecimiento a lo sumo exponencial.

b) Probar que todo polinomio tiene crecimiento a lo sumo exponencial.

c) Probar que e^{t^2} no tiene crecimiento a lo sumo exponencial.

Ejercicio

Probar que si $f(t)$ tiene crecimiento a lo sumo exponencial, $p(t)$ es un polinomio y α es un número entonces el producto $p(t)\, e^{\alpha t} f(t)$ también tiene crecimiento a lo sumo exponencial.

Teorema 1

El conjunto $\mathcal{F}_e$ de funciones s.c. en $[0,\infty)$ y de crecimiento a lo sumo exponencial es un espacio vectorial.

Demostración

Debemos probar que la suma y el producto por números de funciones de $\mathcal{F}_e$ pertenecen también a $\mathcal{F}_e$.

i) Si $f_1(t)$, $f_2(t)$ están en $\mathcal{F}_e$, es fácil ver que $f_1(t) + f_2(t)$ es seccionalmente continua.
Sea $| f_1(t) | \leqslant k\, e^{\alpha t}$, $| f_2(t) | \leqslant k'\, e^{\alpha' t}$. Si β es tal que $\beta \geqslant \alpha$, $\beta \geqslant \alpha'$ entonces

$$|f_1(t) + f_2(t)| \leqslant |f_1(t)| + |f_2(t)| \leqslant (k + k')\, e^{\beta t}$$

ii) Si λ es un número y $f(t)$ está en $\mathcal{F}_e$ con $|f(t)| \leqslant k\, e^{\alpha t}$, entonces $\lambda\, f(t)$ es seccionalmente continua y $|\lambda\, f(t)| \leqslant |\lambda|\, k\, e^{\alpha t}$.

q.e.d.

Teorema 2

Si $f(t) \in \mathcal{F}_e$ y si $|f(t)| \leqslant k\, e^{\alpha t}$, la transformada de Laplace $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$ está definida en $s > \alpha$.
Además es derivable y su derivada es

$$F'(s) = -\int_0^\infty t\, f(t)\, e^{-s t}\, dt = -\mathcal{L}(t\, f(t))\,(s) .$$

Demostración

a) Por ser $f(t)$ seccionalmente continua, la función $f(t)\, e^{-s t}$ es integrable en cada intervalo finito $[0, a]$.
Además $| f(t)\, e^{-s t} | \leqslant k\, e^{\alpha t}\, e^{-s t} = k\, e^{-(s-\alpha) t}$.
Luego, para $s > \alpha$ la integral de $f(t)\, e^{-s t}$ es absolutamente convergente en $[0,\infty)$ y por ello $\int_0^\infty f(t)\, e^{-s t}\, dt$ converge para esos valores de s .

b) En las condiciones establecidas, se puede la intercambiar la derivada y la integral obteniendo

$$F'(s) = \int_0^\infty \partial_s (f(t)\, e^{-s t})\, dt = \int_0^\infty (-t)\, f(t)\, e^{-s t}\, dt = -\mathcal{L}(t\, f(t))\,(s)$$

q.e.d.

Observación

Para que exista la transformada de Laplace de una función $f(t)$ es suficiente que sea integrable en cada intervalo finito $[0, a]$ y que tenga crecimiento a lo sumo exponencial.

Por ejemplo, consideremos las funciones t^α, $\alpha > -1$ que son integrables en intervalos finitos pero, si $-1 < \alpha < 0$, no son seccionalmente continuas.

Con el cambio de variables $s\,t = x$ en la integral de la transformada, y tomando $s > 0$, $s > \alpha$, obtenemos

$$\int_0^\infty t^\alpha\, e^{-s\,t}\, dt = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^\infty x^\alpha\, e^{-x}\, dx = \Gamma(\alpha)\, s^{-(\alpha+1)}$$

donde $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^\alpha\, e^{-x}\, dx$ es la función gama. Calculamos algunos valores de esta importante función.

Para $\alpha = n = 0,\ 1,\ 2,$ .... se prueba, por inducción e integración por partes, que $\Gamma(n) = n!$ y por lo tanto

$$\mathcal{L}(t^n)\,(s) = n!\, s^{-(n+1)}$$

Para $\alpha = -\frac{1}{2}$ $\quad \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx = 2\int_0^\infty e^{-\tau^2}\, d\tau = \int_{-\infty}^\infty e^{-\tau^2}\, d\tau = I$

Esta última integral se puede calcular usando coordenadas polares en el plano,

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\, dx\right)\left(\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2}\, dy\right) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$
$$= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r\, e^{-r^2}\, dr\, d\vartheta = 2\pi \int_0^{2\pi} r\, e^{-r^2}\, dr = \pi$$

Luego

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)(s) = \sqrt{\pi}\ s^{-\frac{1}{2}}$$

Para $\alpha = \frac{1}{2}$ $\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \sqrt{x}\ e^{-x}\, dx = 2\int_0^\infty \tau^2\, e^{-\tau^2}\, d\tau = \int_{-\infty}^\infty \tau^2\, e^{-\tau^2}\, d\tau$

$$= \int_{-\infty}^\infty \tau\ \partial_\tau\left(\frac{e^{-\tau^2}}{-2}\right) d\tau = \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-\tau^2}}{2}\, d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\mathcal{L}\left(\sqrt{t}\,\right)(s) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, s^{-\frac{3}{2}}$$

Ejercicio

Obtener de manera similar

$$\mathcal{L}(\ln t\,)\,(s) = \frac{-\gamma - \ln s}{s}$$

donde $\gamma = \int_0^\infty \log t\, e^{-t}\, dt = 0.5772$ .... es conocida como “constante de Euler”.

PROPIEDADES

L1 Linealidad

La transformada de Laplace es lineal sobre $\mathcal{F}_e$

$$\mathfrak{L}(c_1\, f_1 + c_2\, f_2)(s) = c_1\, \mathfrak{L}(f_1)(s) + c_2\, \mathfrak{L}(f_2)(s) \qquad \text{para} \quad s > \alpha = \max(\alpha_1,\, \alpha_2)$$

Demostración

Es consecuencia de que $\mathcal{F}_e$ es un espacio vectorial y que la integración es lineal.

q.e.d.

L2 Transformada de la derivada

Si $f(t)$ es continua en $t \geqslant 0$ y $f(t)$ y $f'(t)$ pertenecen a $\mathcal{F}_e$ entonces

$$\mathfrak{L}(f')(s) = s\, \mathfrak{L}(f)(s) - f(0)$$

Demostración

Como $f(t)$ es continua y $f'(t)$ es seccionalmente continua, podemos integrar por partes, y usando que $\lim_{t\to\infty} f(t)\, e^{-s t} = 0$ para $s > \alpha$ si $|f(t)| \leqslant k\, e^{\alpha t}$, obtenemos

$$\int_0^\infty f'(t)\, e^{-s t}\, dt = [f(t)\, e^{-s t}]_0^\infty - \int_0^\infty f(t)(-s)\, e^{-s t}\, dt = -f(0) + s\, \mathfrak{L}(f)(s)$$

q.e.d.

Utilizando estas dos propiedades, veamos que la transformada de Laplace permite transformar problemas del análisis matemático en problemas algebraicos, facilitando su solución.

Ejemplo 1 Consideremos el problema $2\, x' + x = e^{-t},\ x(0) = -3$

Utilizando L1 y L2, hallamos que el transformado de Laplace del problema es $2\,[s\, X(s) + 3] + X(s) = \frac{1}{s+1}$.

Despejando, obtenemos la transformada de Laplace de la incógnita $X(s) = \frac{-5-6\, s}{(2\, s+1)(s+1)}$.

Para encontrar una función que tiene por transformada de Laplace esta $X(s)$ la descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{-5-6\, s}{(2\, s+1)(s+1)} = -\frac{1}{s+1} - 2\, \frac{1}{s+\frac{1}{2}}$$

Sabemos que $\mathfrak{L}(e^{-t})(s) = \frac{1}{s+1}$ y $\mathfrak{L}\left(e^{-\frac{t}{2}}\right)(s) = \frac{1}{s+\frac{1}{2}}$ luego, por L1 la función $x(t) = -e^{-t} - 2\, e^{-\frac{1}{2} t}$ tiene por transformada $X(s)$. Esta es la solución del problema.

Ejemplo 2 La transformada de Laplace de $-x' + x = e^{t},\ x(0) = 2$ es $-[s\, X(s) - 2] + X(s) = \frac{1}{s-1}$.

Despejando y descomponiendo obtenemos $X(s) = \frac{2\, s-3}{(s-1)^2} = -\frac{1}{(s-1)^2} + 2\, \frac{1}{s-1}$ cuya antitransformada es $x(t) = -t\ e^t + 2\ e^t$, que es la solución.

Transformada de la derivada segunda

Aplicando dos veces la regla de la transformada de la derivada, con hipótesis adecuadas, se obtiene

$$\mathfrak{L}(f\ '')(s) = s\,\mathfrak{L}(f\ ')(s) - f\ '(0) = s\,[\,s\ \mathfrak{L}(f\ )(s) - f(0)\,] - f\ '(0) = s^2\ \mathfrak{L}(f\ ) - s\ f(0) - f\ '(0)$$

Ejemplo 3 Sea el problema $x'' + 3\,x' + 2\,x = e^{-3\,t}$, $x(0) = -2$, $x'(0) = 1$

Transformando Laplace hallamos

$$\left(s^2\ X + 2\,s - 1\right) + 3\,(s\,X\ + 2) + 2\,X = \frac{1}{s+3} \quad \Rightarrow \quad X(s) = \frac{-2\,s^2 - 11\,s\ -14}{\left(s^2 + 3\,s + 2\right)(s+3)}$$

Descomposición esta función en fracciones simples con el programa *Mathematica*

```
Apart[ (-2 s^2 - 11 s - 14) / ((s^2 + 3 s + 2) (s + 3)) ]
```

$$-\frac{5}{2\,(1+s)} + \frac{1}{2\,(3+s)}$$

Luego la solución es $x(t) = -\frac{5}{2}\,e^{-t} + \frac{1}{2}\,e^{-3\,t}$. La comprobamos

```
x[t_] := -5/2 e^-t + 1/2 e^-3 t
{x[0], x'[0], x''[t] + 3 x'[t] + 2 x[t]} // Simplify
{-2, 1, e^-3 t}
```

Ejercicio

Resolver los siguientes problemas y comprobar las soluciones obtenidas.

a) $x'' + 2x' + x = 1$, $x(0) = -1$, $x'(0) = 2$

b) $x'' + 2x' + x = e^{-2t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$

L3 Desplazamiento en la transformada

Si $f(t)$ pertenece a $\mathcal{F}_e$ entonces $f(t)\,e^{\lambda t}$ también pertenece a $\mathcal{F}_e$ y su transformada es

$$\mathfrak{L}\left(f(t)\,e^{\lambda t}\right)(s) = F(s-\lambda)$$

Demostración

$$\mathfrak{L}\left(f(t)\,e^{\lambda t}\right)(s) = \int_0^\infty f(t)\,e^{\lambda t}\,e^{-st}\,dt = \int_0^\infty f(t)\,e^{-(s-\lambda)t}\,dt = F(s-\lambda)$$

q.e.d.

Ejemplo De $\mathfrak{L}(t)(s) = \frac{1}{s^2}$ resulta $\mathfrak{L}\left(t\,e^{\lambda t}\right)(s) = \frac{1}{(s-\lambda)^2}$

L4 Derivada de la transformada

Si $f(t)$ pertenece a $\mathcal{F}_e$, entonces $t^n\, f(t)$ también pertenece a $\mathcal{F}_e$, para cada $n = 1, 2, \ldots$, y

$$\mathfrak{L}(t^n\, f(t))(s) = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

Demostración

Si $f(t)$ está en $\mathcal{F}_e$ es claro que $t^n\, f(t)$ también está en $\mathcal{F}_e$.

En nuestras condiciones se puede obtener la derivada de $F(s) = \int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt$ derivando bajo el signo de integral

$$F'(s) = \int_0^\infty (-t)\, f(t)\,e^{-st}\,dt$$
$$F''(s) = \int_0^\infty t^2\, f(t)\,e^{-st}\,dt \quad \text{etc.}$$

q.e.d.

Ejercicio

Aplicando la propiedad L4 demostrar que $\mathfrak{L}\left[\frac{t^n}{n!}\,e^{\lambda t}\right](s) = \frac{1}{(s-\lambda)^{n+1}}$ y que

$$\mathfrak{L}\left[\left(a_0 + a_1 t + \frac{1}{2!}\,a_2 t^2 + \frac{1}{3!}\,a_3 t^3\right)e^{\lambda t}\right](s) = \frac{a_0}{s-\lambda} + \frac{a_1}{(s-\lambda)^2} + \frac{a_2}{(s-\lambda)^3} + \frac{a_3}{(s-\lambda)^4}$$

Ejercicio

Calcular $\mathfrak{L}[t\,e(t)](s)$ y $\mathfrak{L}[t\;\; e^{-t}\,u(t)](s)$

Transformada de exponenciales complejas

Para $\lambda = a + i\,b$ complejo se tiene

$$\mathfrak{L}\left[e^{\lambda t}\right](s) = \frac{1}{s-\lambda} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{L}\left[e^{(a+i\,b)\,t}\right](s) = \frac{1}{s-(a+i\,b)} = \frac{(s-a)+i\,b}{(s-a)^2+b^2} \quad \Rightarrow$$

$$\mathfrak{L}[e^{a\,t}\cos b\,t + i\,e^{a\,t}\,\mathrm{sen}\,b\,t](s) = \mathfrak{L}[e^{a\,t}\cos b\,t](s) + i\,\mathfrak{L}[e^{a\,t}\,\mathrm{sen}\,b\,t](s) = \frac{(s-a)+i\,b}{(s-a)^2+b^2}$$

Como s es un número real, separando parte real e imaginaria en la expresión anterior se obtienen

$$\mathfrak{L}[e^{a\,t}\cos b\,t](s) = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$$

$$\mathfrak{L}[e^{a\,t}\,\mathrm{sen}\,b\,t](s) = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$$

Ejemplo Resolvemos el problema $x'' + x' + x = \mathrm{sen}\,t,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1$

Usando la transformada de Laplace

$$\left[-x'(0) - s\,x(0) + s^2\,X(s)\right] + [-x(0) + s\,X(s)] + X(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

Despejando $X(s)$ y separando en fraccioners simples se tiene

$$X(s) = \frac{s^2+2}{(s^2+1)(s^2+s+1)} = \frac{s^2+2}{(s^2+1)\left[\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right]} = \frac{a\,s+b}{s^2+1} + \frac{c\left(s+\frac{1}{2}\right)+d\,\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

Debe ser $s^2 + 2 = (a\,s + b)\left[\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right] + (s^2+1)\left[c\left(s+\frac{1}{2}\right) + d\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

Para $s = i,\ -\frac{1}{2},\ 0$ se obtiene sucesivamente $a = -1,\ b = 0,\ c = 1,\ d = \sqrt{3}$.
Luego

$$x(t) = -\cos t + \sqrt{3}\,e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{sen}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,t + e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\,t$$

Comprobamos que esta función verifica el problema.

```
x[t_] := - Cos[t] + √3 e^(-t/2) Sin[(√3/2) t] + e^(-t/2) Cos[(√3/2) t]
{x[0], x'[0], x''[t] + x'[t] + x[t]} // Simplify
{0, 1, Sin[t]}
```

Ejercicio

Resolver los problemas

a) $x'' + x' + x = e^{-t} \cos t,\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0$

Rta: $x(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2}\, t + \sqrt{3}\ \text{sen}\ \frac{\sqrt{3}}{2}\, t\right) - e^{-t}\,\text{sen}\, t$

b) $x'' + 3\,x' + 2\,x = e^{-t} \cos t,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0$

c) $x'' + 2\,x' + 2\,x = t,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1$

Ejercicio

Calcular $\mathfrak{L}[t\,\text{sen}\,t]\,u(t)$ y $\mathfrak{L}[t \cos t\, u(t)]$

Ejercicio “Polos dobles complejos”

a) Transformando Laplace $t\, e^{(\alpha + i\,\beta)\,t}$ y $t\, e^{(\alpha - i\,\beta)\,t}$ y sumando, obtener

$$\mathfrak{L}[t\, e^{\alpha\, t} \cos \beta\, t\,](s) = \frac{1}{(s-\alpha)^2 + \beta^2} - \frac{2\,\beta^2}{\left[(s-\alpha)^2 + \beta^2\right]^2}$$

$$\mathfrak{L}[t\, e^{\alpha\, t}\, \text{sen}\, \beta\, t\,](s) = \frac{2\,(s-\alpha)\,\beta}{\left[(s-\alpha)^2 + \beta^2\right]^2}$$

b) Deducir las transformadas

$$\mathfrak{L}[e^{\alpha\, t}\, \text{sen}\, \beta\, t\ -\ t\ \beta\ e^{\alpha\, t} \cos \beta\, t\,](s) = \frac{2\,\beta^3}{\left[(s-\alpha)^2 + \beta^2\right]^2}$$

$$\mathfrak{L}[t\, e^{\alpha\, t}\, \text{sen}\, \beta\, t\,](s) = \frac{2\,\beta(\,s-\alpha\,)}{\left[(s-\alpha)^2 + \beta^2\right]^2}$$

L5 "Anulación en el infinito"
Si $f(t)$ pertenece a $\mathcal{F}_e$ entonces $\lim_{s\to+\infty} \mathfrak{L}(f\}(s) = 0$
Demostración
Si $|f(t)| \leqslant k\, e^{\alpha t}$ entonces

$$|\mathfrak{L}(f\}(s)| \leqslant k \int_0^\infty e^{-t(s-\alpha)}\, dt = \frac{k}{s-\alpha} \to 0 \text{ si } s \to +\infty$$

q.e.d

Ejemplos
a) $\mathfrak{L}(\cos t)(s) = \frac{s}{s^2+1} \to 0$ si $s \to +\infty$

b) Como $\lim_{s\to\infty} \frac{s+1}{2s+1} \to \frac{1}{2}$ la función $\frac{s+1}{2s+1}$ no es transformada de ninguna función de $\mathcal{F}_e$.

L6 Transformada del cociente $\frac{f(t)}{t}$
Si $f(t)$ pertenece a $\mathcal{F}_e$ y $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ es finito, entonces $\frac{f(t)}{t}$ pertenece a $\mathcal{F}_e$ y

$$\mathfrak{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)(s) = \int_s^\infty F(r)\, dr$$

Demostración
En las condiciones especificadas, la derivada de $\mathfrak{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)(s) = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\, e^{-s t}\, dt$ es

$\frac{d}{ds}\mathfrak{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)(s) = -\int_0^\infty f(t)\, e^{-s t}\, dt = -F(s)$ y por la propiedad 5 $\lim_{s\to+\infty} \mathfrak{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)(s) = 0$.

Luego $\mathfrak{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)(s)$ es la primitiva de $-F(s)$ que vale 0 en $+\infty$, que es justamente $\int_s^\infty F(r)\, dr$.

q.e.d.

Ejemplo $\mathfrak{L}\left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)(s) = \int_s^\infty \frac{1}{r^2+1}\, dr = \operatorname{arctg} \infty - \operatorname{arctg} s = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} s$

Nota Tomando límite se tiene $\lim_{s\to 0^+} \int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, e^{-s t}\, dt = \frac{\pi}{2}$.
Se puede justificar que se puede intercambiar el límite con la integral, (teorema de convergencia dominada) con lo cual obtenemos la igualdad $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$, que será demostrada nuevamente en la unidad 4, usando el teorema de Cauchy en el plano complejo.

Ejercicio

Probar que $\mathfrak{L}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)(s) = \log \frac{\sqrt{s^2+1}}{s}$. Observar que verifica la propiedad 5

Ejercicio

Probar que $\mathfrak{L}\left(\frac{1-e^{-t}}{t}\right)(s) = \log \frac{s+1}{s}$. Observar que verifica la propiedad 5

L7 Transformada de una convolución

Sean $f(t)$ y $g(t)$ dos funciones de $\mathcal{F}_e$, entonces $f * g$ pertenece a $\mathcal{F}_e$ y vale

$$\mathfrak{L}(f * g) = \mathfrak{L}(f)\,\mathfrak{L}(g)$$

Demostración

Sea $|f(t)| \leqslant k\, e^{\alpha t}$ y $|g(t)| \leqslant K\, e^{\beta t}$ y supongamos que $\alpha \geq \beta$.

Vale $|(f * g)(t)| = \left|\int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau\right| \leqslant k K \int_0^t e^{\alpha \tau}\, e^{\alpha (t-\tau)}\, d\tau = k K\; t\, e^{\alpha t}$.

Como $t \leqslant e^t$ para cada $t \geqslant 0$, se tiene la acotación $|(f * g)(t)| < k K\; e^{(\alpha+1) t}$.

La integral iterada en

$$\mathfrak{L}(f * g)(s) = \int_0^\infty \left[\int_0^t f(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau\right] e^{-s t}\, dt = \iint_R f(\tau)\, g(t-\tau)\, e^{-s t}\, d\tau\, dt$$

la hemos puesto como integral doble en la región $R = \{(\tau, t) : 0 \leqslant \tau \leqslant t\}$. A su vez esta integral doble la calculamos en forma iterada pero en el otro orden:

$$\mathfrak{L}(f * g)(s) = \int_0^\infty \left[\int_\tau^\infty g(t-\tau)\, e^{-s t}\, dt\right] f(\tau)\, d\tau = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty g(r)\, e^{-s r}\, dr\right] e^{-s \tau}\; f(\tau)\, d\tau$$

donde hemos hecho el cambio de variables $t - \tau = r$. El corchete dentro de la integral es $\mathfrak{L}(g)(s)$ y no depende de τ. Luego sale fuera de la integral y queda el producto $\mathfrak{L}(f)(s) . \mathfrak{L}(g)(s)$.

q.e.d.

Ejemplo

Calcularemos por transformada de Laplace la convolución de las funciones $f(t) = e^{-t}\, u(t)$ y $g(t) = t\, e^{-2 t}\, u(t)$.
Como $g(t)$ es continua en toda la recta, con derivada seccionalmente continua, se espera que la convolución tenga derivada continua. Se tiene $F(s) = \frac{1}{s+1}$, $G(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$ y $F(s)\, G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+2)^2} - \frac{1}{s+2}$

Antitransformando, queda la función

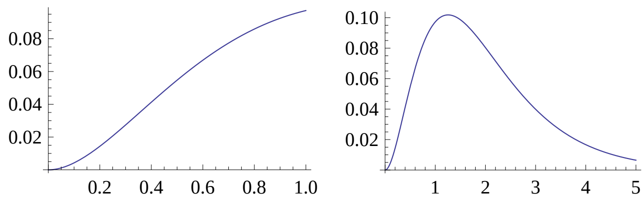
$$(f * g)(t) = \left[e^{-t} - t\, e^{-2 t} - e^{-2 t}\right] u(t)$$

que es continua y derivable en toda la recta. Observemos que en el origen se tiene

$$(f * g)(0^-) = 0 = (f * g)(0^+) \quad \text{y} \quad (f * g)'(0^-) = 0 = (f * g)'(0^+)$$

La graficamos cerca del origen y en un intervalo más prolongado.

```
GraphicsGrid[{{Plot[e^-t - t e^-2t - e^-2t, {t, 0, 1}], Plot[e^-t - t e^-2t - e^-2t, {t, 0, 5}]}}]
```



Ejercicio Efectuar la convolución $e^{at}\, u(t) * e^{bt}\, u(t)$, distiguiendo los casos $a = b$ y $a \neq b$,
a) directamente
b) utilizando la transformada de Laplace.

Ejercicio Efectuar la convolución $e^{at}\, u(t) * \operatorname{sen} t\ u(t)$
a) directamente
b) utilizando la transformada de Laplace.

L8 Atraso en el tiempo
Si $f(t)$ en $\mathcal{F}_e$ y $a > 0$, la función retrasada $f(t-a)\,u(t-a)$ pertenece a $\mathcal{F}_e$ y vale

$$\mathfrak{L}[f(t-a)\,u(t-a)]\,(s) = e^{-as}\,\mathfrak{L}(f)\,(s)$$

Demostración

$$\mathfrak{L}[f(t-a)\,u(t-a)]\,(s) = \int_a^\infty f(t-a)\,e^{-st}\,dt = \int_0^\infty f(r)\,e^{-s(r+a)}\,dr = e^{-sa}\,\mathfrak{L}(f)\,(s)$$

q.e.d.

Ejemplo Resolvemos el problema $x' + x = u(t) - 2\,u(t-1)$, $x(0) = 0$, por transformada de Laplace.

La transformada de Laplace es $s\,X(s) + X(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s}\,e^{-s}$, y despejando

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)\,s}\,(1 - 2\,e^{-s}) = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right)(1 - 2\,e^{-s}) = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right) - 2\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right)e^{-s}$$

La antitransformada es

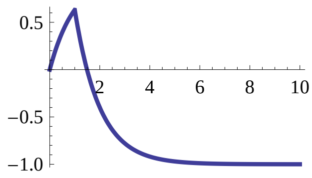
$$x(t) = (1 - e^{-t})\,u(t) - 2\left(1 - e^{-(t-1)}\right)u(t-1)$$

y $\lim_{t\to+\infty} x(t) = -1$. Es continua pero no es derivable en $t = 1$ pues

$$x(1^-) = x(1^+) = 1 - e^{-1} \qquad \text{y} \qquad x'(1^-) = e^{-1} \neq x'(1^+) = e^{-1} - 2$$

He aquí la gráfica de la solución que pone en evidencia esas observaciones.

```
h[t_] := If[0 < t < 1, 1 - ⅇ^-t, 1 - ⅇ^-t - 2 (1 - ⅇ^-(t-1))]
Plot[h[t], {t, 0, 10}, PlotStyle → {Thick}]
```



Ejercicio

Mostrar que si $\alpha > 0$:

$$\mathfrak{L}\left(\left(a_0 + a_1 (t-\alpha) + \frac{1}{2!} a_2 (t-\alpha)^2\right) e^{\lambda (t-\alpha)} u(t-\alpha)\right)(s) = \left(\frac{a_0}{s-\lambda} + \frac{a_1}{(s-\lambda)^2} + \frac{a_2}{(s-\lambda)^3}\right) e^{-\alpha s}$$

Ejercicio

a) Resolver el problema $x' + x = u(t) - 2\, u(t-1) + u(t-2)$, $x(0) = 1$. Graficar la entrada y la solución.

b) Idem para $x'' + 2x' + 2x = u(t) - u(t-1)$, $x(0) = x'(0) = 0$.

Ejemplo Queremos calcular y graficar $x(t) = e(t) * t\, e(t)$ mediante la transformada de Laplace.

Transformamos Laplace la convolución

$$X(s) = \mathfrak{L}(e * t\, e)(s) = \mathfrak{L}(e)(s).\, \mathfrak{L}(t\, e)(s) = \frac{1-e^{-s}}{s}. (-1) \left(\frac{1-e^{-s}}{s}\right)' = \frac{1-e^{-s}}{s} \frac{1-s\, e^{-s} - e^{-s}}{s^2}$$
$$= \frac{1}{s^3} - \left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s^3}\right) e^{-s} + \left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3}\right) e^{-2s}$$

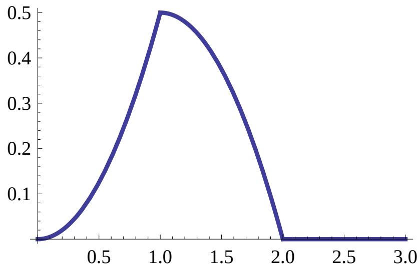
Antitransformando se obtiene

$$x(t) = (e * t\, e)(t) = \frac{t^2}{2} u(t) - \left[(t-1) + (t-1)^2\right] u(t-1) + \left[(t-2) + \frac{(t-2)^2}{2}\right] u(t-2)$$

Separamos los valores de esta solución por tramos y la graficamos

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} t^2 & 0 < t < 1 \\ t - \frac{1}{2} t^2 & 1 < t < 2 \\ 0 & 2 < t \end{cases}$$

```
Plot[1/2 t^2 - ((t - 1)^2 + (t - 1)) UnitStep[t - 1] + ((t - 2) + 1/2 (t - 2)^2) UnitStep[t - 2],
 {t, 0, 3}, PlotStyle → {Thick}]
```



L9 Transformada de primitivas

Si $f(t)$ está en $\mathcal{F}_e$, sus primitivas $\int_0^t f(\tau)\, d\tau + c$ son continuas y también pertenece a $\mathcal{F}_e$ y vale

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right)(s) = \frac{F(s)+c}{s}$$

Demostración

Sea $|f(t)| \leqslant k\, e^{\alpha t}$, $\alpha > 0$, entonces

$$\left|\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right| \leqslant \int_0^t k\, e^{\alpha\tau}\, d\tau = k\, \frac{e^{\alpha t}-1}{\alpha} \leqslant \frac{k}{\alpha}\, e^{\alpha t}$$

y por lo tanto $g(s) = \int_0^t f(\tau)\, d\tau + c$ pertenece a $\mathcal{F}_e$, es continua, $g(0) = c$ y $g'(t) = f(t)$

Por la propiedad L2 $F(s) = \mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(g')(s) = s\,\mathcal{L}(g)(s) - g(0) = s\,\mathcal{L}(g)(s) - c$ y despejando

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)\, d\tau + c\right)(s) = \frac{F(s)+c}{s}$$

q.e.d.

Ejercicio

Comprobar las fórmulas

a) $\mathcal{L}\left(\int_0^t e(\tau)\, d\tau\right)(s) = \frac{1-e^{-s}}{s^2}$ b) $\mathcal{L}\left(\int_0^t \operatorname{sen}\tau\, d\tau\right)(s) = \mathcal{L}(1-\cos t)(s) = \frac{1}{s(s^2+1)}$

L10 Propiedad del valor inicial

Si $f(t)$ es continua en $t \geqslant 0$, $f(t)$ y $f'(t)$ pertenecen a $\mathcal{F}_e$, entonces $\lim_{s\to+\infty} s\,F(s) = f(0)$.

Demostración

Por ser $f(t)$ continua con derivada seccionalmente continua podemos integrar por partes

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-s t}\, dt = \left[f(t)\, \frac{e^{-s t}}{-s} \right]_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty f'(t)\, e^{-s t}\, dt = \frac{1}{s}\, f(0) + \frac{1}{s}\, \mathfrak{L}(f')(s)$$

Luego $s\,F(s) = f(0) + \mathfrak{L}(f')(s)$; aplicando la propiedad L5 a f' obtenemos $\lim_{s\to+\infty} \mathfrak{L}(f')(s) = 0$ y entonces $\lim_{s\to+\infty} s\,F(s) = f(0)$,

q.e.d.

Ejemplos

a) $s\, \mathfrak{L}(\operatorname{sen} t)(s) = \frac{s}{s^2+1} \to 0 = \operatorname{sen} 0$ para $s \to +\infty$.

b) $s\, \mathfrak{L}(\cos t)(s) = \frac{s^2}{s^2+1} \to 1 = \cos 0$ para $s \to +\infty$.

L11 Propiedad del valor final

Si $f(t)$, $f'(t)$ pertenecen a $\mathcal{F}_e$ y $\int_0^\infty |\, f'(t) \,|\, dt < \infty$, entonces el límite $\lim_{t\to\infty} f(t) = f(+\infty)$ existe, es finito y $\lim_{s\to 0^+} s\,F(s) = f(+\infty)$.

Demostración

Excede el nivel del curso.

a) Primero supongamos que $f(t)$ es continua.

Entonces $f(M) - f(0) = \int_0^M f'(t)\, dt$ y como la integral $\int_0^\infty |\, f'(t) \,|\, dt$ converge existe el límite $\lim_{M\to\infty} \int_0^M f'(t)\, dt$ y es finito. Luego existe el límite $\lim_{M\to\infty} f(M) = f(\infty)$ y es finito.

Integrando por partes obtenemos

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-s t}\, dt = \left[f(t)\, \frac{e^{-s t}}{-s} \right]_0^\infty + \frac{1}{s} \int_0^\infty f'(t)\, e^{-s t}\, dt = \frac{1}{s}\, f(0) + \frac{1}{s} \int_0^\infty f'(t)\, e^{-s t}\, dt$$

Usando $|\, f'(t)\, e^{-s t} \,| \leqslant |\, f'(t) \,|$ para $s \geqslant 0$, $t \geqslant 0$, se demuestra, por "convergencia dominada", que

$$\lim_{s\to 0^+} \int_0^\infty f'(t)\, e^{-s t}\, dt = \int_0^\infty f'(t)\, dt = f(+\infty) - f(0)$$

Luego $\lim_{s\to 0^+} s\,F(s) = \lim_{s\to 0^+} \left(f(0) + \int_0^\infty f'(t)\, e^{-s t}\, dt \right) = f(+\infty)$.

b) Si $f(t)$ tiene finitos saltos de magnitud λ_i en $t = \alpha_i$ entonces $\tilde{f}(t) = \int_0^t f'(\tau)\, d\tau$ es continua,

$\tilde{f}'(t) = f'(t)$ en los puntos de continuidad de $f(t)$, y $f(t) = \tilde{f}(t) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, u(t - \alpha_i)$.
Por la parte a), la propiedad vale para $\tilde{f}(t)$, y entonces existe

$$f(+\infty) = \lim_{t\to\infty} f(t) = \tilde{f}(+\infty) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i .$$

Además

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-s\,t}\, dt = \int_0^\infty \tilde{f}(t)\, e^{-s\,t}\, dt + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \int_0^\infty u(t - \alpha_i)\, e^{-s\,t}\, dt$$
$$= \int_0^\infty \tilde{f}(t)\, e^{-s\,t}\, dt + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{e^{-\alpha_i s}}{s}$$

Multiplicando por s y tomando límite obtenemos $\lim_{s\to 0^+} s\,F(s) = \tilde{f}(\infty) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = f(+\infty)$.

q.e.d.

Ejemplos

a) Si $\alpha < 0$ la función $f(t) = e^{\alpha\,t} \cos \beta\, t$ verifica las condiciones anteriores.
Por otro lado, $s\,F(s) = \frac{s\,(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$ y $\lim_{s\to 0^+} s\,F(s) = 0 = \lim_{t\to\infty} f(t)$.

b) $u(t-1)$ verifica las condiciones de la propiedad.
Además $\lim_{s\to 0^+} s\,F(s) = \lim_{s\to 0^+} \frac{s\,e^{-s}}{s} = 1 = \lim_{t\to\infty} f(t)$

L 12 Transformada de una función periódica

Sea $f(t)$ una función de $\mathcal{F}_e$ y de período $p > 0$: $f(t+p) = f(t)$. Entonces

$$\mathfrak{L}(f)(s) = \frac{1}{1-e^{-p\,s}} \int_0^p f(t)\, e^{-s\,t}\, dt$$

Demostración

Separamos la integral como una suma de integrales en los intervalos $[k\,p,\ (k+1)\,p]$:

$$\mathfrak{L}(f)(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-s\,t}\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\,p}^{(k+1)\,p} f(t)\, e^{-s\,t}\, dt$$

Haciendo el cambio de variables $t = k\,p + \tau$ y usando la periodicidad de $f(t)$ queda

$$\int_{k\,p}^{(k+1)\,p} f(t)\, e^{-s\,t}\, dt = \int_0^p f(k\,p + \tau)\, e^{-s(k\,p+\tau)}\, d\tau = e^{-s\,k\,p} \int_0^p f(\tau)\, e^{-s\,\tau}\, d\tau$$

Luego

$$\mathfrak{L}(f)(s) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} (e^{-s\,p})^k\right] \int_0^p f(\tau)\, e^{-s\,\tau}\, d\tau$$

La serie dentro del corchete es una la serie geométrica de razón $0 < e^{-s\,p} < 1$ cuya suma es

$$\sum_{k=0}^{\infty} (e^{-s\,p})^k = \frac{1}{1-e^{-s\,p}}$$

Luego queda finalmente

$$\mathfrak{L}(f)(s) = \frac{1}{1-e^{-s\,p}} \int_0^p f(\tau)\, e^{-s\,\tau}\, d\tau$$

q.e.d.

Observación

La transformada de Laplace de una función periódica $f(t)$ tiene la forma

$$\mathfrak{L}(f)(s) = \frac{1}{1-e^{-s\,p}}\; G(s)$$

donde $G(s) = \int_0^p f(t)\, e^{-s\,t}\, dt$ es la transformada de Laplace del modelo.
Como el modelo tiene soporte compacto, $G(s)$ es una función analítica en todo el plano complejo s, como se prueba en el Anexo I.

Ejemplo 1

Hallemos la antitransformada de $F(s) = \frac{1}{\left(1-e^{-2\,s}\right)} \frac{1}{(s+1)}$

No es la transformada de una función periódica pues $\frac{1}{s+1}$ tiene un polo en $s = -1$.
Para encontrar la antitransformada consideramos el desarrollo en serie geométrica para $s > 0$:

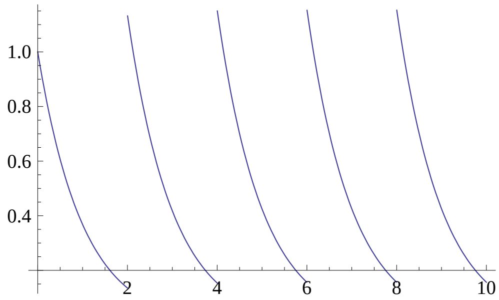
$$\frac{1}{1-e^{-2\,s}} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\,k\,s}$$

Entonces $F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{s+1}\, e^{-2\,k\,s}$ cuya antitransformada es $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(t-2\,k)}\, u(t-2\,k)$.

La graficamos en el intervalo $0 < t < 10$.

```
n = 10; Plot[Sum[e^-(t-2 k) UnitStep[t - 2 k], {k, 0, n}], {t, 0, n}]
```

$$n = 10;\ \mathrm{Plot}\left[\sum_{k=0}^{n} e^{-(t-2k)}\ \mathrm{UnitStep}[t-2k],\ \{t, 0, n\}\right]$$



No es periódica, pero se acerca a una periódica de período 2. En efecto, si $2n < t < 2(n+1)$, entonces $2(n+1) < t+2 < 2(n+2)$ y

$$f(t+2) - f(t) = \sum_{k=0}^{n+1} e^{-(t+2-2k)} - \sum_{k=0}^{n} e^{-(t-2k)} = e^{-(t+2)} \leqslant e^{-2n-2}$$

que se acerca a 0 a medida que el intervalo $\{2n,\ 2(n+1)]$ se aleja a ∞

Ejercicio

Halle la antitransformada de $\frac{1}{(1-e^{-2s})}\frac{s}{(s+1)^2}$ y grafíquela. No es periódica.

Ejercicio

Halle la antitransformada de $\frac{1}{(1-e^{-s})}\frac{1-e^{-s}}{s}$ y grafíquela. Es periódica.

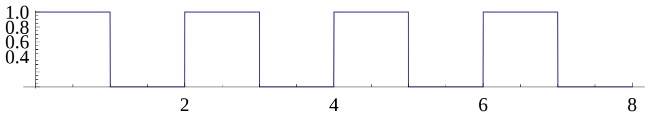
Ejercicio

Halle α para que la antitransformada de $\frac{1}{(1-e^{-2s})}\frac{s+\alpha e^{-s}}{s+1}$ sea periódica y grafíquela.

Ejemplo 2

Sea el problema $x' + x = f(t),\ x(0) = 0$ con $f(t)$ de período 2 y modelo $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leqslant t \leqslant 2 \end{cases}$

```
f[t_] := If[0 < t < 1, 1, 0]
Plot[f[Mod[t, 2]], {t, 0, 8}, AspectRatio → Automatic]
```



Sabemos que la solución es continua y la derivada es seccionalmente continua, con saltos en $t = 1, 2, 3, \ldots.$

La transformada de Laplace de $f(t)$ es $F(s) = \frac{1}{1-e^{-2s}} \frac{1-e^{-s}}{s}$ y transformando el problema queda

$$X(s) = \frac{1}{1-e^{-2s}} \frac{1-e^{-s}}{s(s+1)} = \frac{1}{1-e^{-2s}} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right)(1 - e^{-s})$$

No es transformada de una periódica pues $\frac{1-e^{-s}}{s(s+1)}$ tiene un polo en $s = -1$.

Para hallar la antitransformada desarrollamos en serie geométrica

$$\frac{1-e^{-s}}{1-e^{-2s}} = (1 - e^{-s})\left(1 + e^{-2s} + e^{-4s} + e^{-6S} + \ldots..\right) = 1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} + e^{-4s} - e^{-5s} + ..$$

Luego

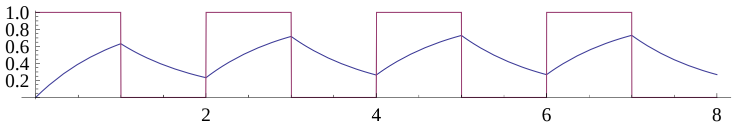
$$X(s) = \frac{1-e^{-s}}{1-e^{-2s}} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right) = \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right) - \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right) e^{-s} + \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right) e^{-2s} - \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right) e^{-3s} + ..$$

y antitransformando obtenemos la solución

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, g(t-k)\, u(t-k) \qquad \text{con} \qquad g(t) = 1 - e^{-t}$$

Graficamos la entrada y salida en el intervalo [0, 8].

```
f[t_] := If[0 < t < 1, 1, 0]
g[t_] := 1 - ⅇ^-t
Plot[{∑_{k=0}^{8} (-1)^k g[t - k] UnitStep[t - k], f[Mod[t, 2]]}, {t, 0, 8},
 AspectRatio → Automatic]
```



En los intervalos impares $[2k+1, 2k+3]$ no hay acción externa y la respuesta es solución de la homogénea. Por ejemplo, en el intervalo $1 \leqslant t \leqslant 2$, la respuesta es

$$x(t) = (1 - e^{-t}) - \left(1 - e^{-(t-1)}\right) = e\, e^{-t}$$

Ejemplo 3

Sea el problema $x' + x = |\operatorname{sen} t|$, $x(0) = x_0$.

a) Supongamos $x(0) = 0$
.
Como $|\operatorname{sen} t|$ es continua, sabemos que la solución es continua con derivada continua.
La transformada de Laplace de $|\operatorname{sen} t|$ es $\frac{1}{1-e^{-\pi s}} \frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}$ y la transformada de $x(t)$ es

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)\left(s^2+1\right)} \frac{1+e^{-\pi s}}{1-e^{-\pi s}}$$

Como $\frac{1+e^{-\pi s}}{(s+1)\left(s^2+1\right)}$ tiene un polo de orden 1 en $s = -1$, la solución $x(t)$ no es periódica.
Para hallar una fórmula para $x(t)$ desarrollamos en serie geométrica

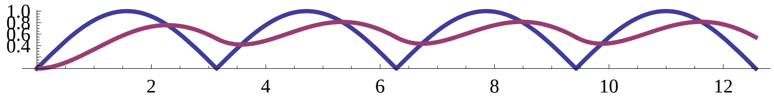
$$\frac{1+e^{-\pi s}}{1-e^{-\pi s}} = (1 + e^{-\pi s})\left(1 + e^{-\pi s} + e^{-2\pi s} + e^{-3\pi s} + \ldots.\right) = 1 + 2\left(e^{-\pi s} + e^{-2\pi s} + \ldots\right)$$

Por otro lado la antitransformada de $\frac{1}{(1+s)\left(s^2+1\right)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s+1} - \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}\right]$ es

$g(t) = \frac{1}{2}\left(e^{-t} - \cos t + \operatorname{sen} t\right)$. Luego $x(t) = g(t) + 2 \sum_{k=0}^{\infty} g(t - \pi k)\, u(t - \pi k)$

Graficamos la entrada y la salida en el intervalo $[0, 4\pi]$ y notamos que no es periódica, pero paulatinamente se va pareciendo a una periódica.

```
g[t_] := 1/2 (ⅇ^-t - Cos[t] + Sin[t])
Plot[{Abs[Sin[t]], g[t] + 2 (Sum[g[t - π k] UnitStep[t - π k], {k, 1, 8}])}, {t, 0, 4 π},
  AspectRatio → Automatic, PlotStyle → Thick]
```



b) Buscamos una condición inicial x_0 para que la solución de $x' + x = |\text{sen}\, t|$ sea de período π .

La transformada de Laplace es

$$X(s) = \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \, \frac{(1+e^{-\pi s}) + x_0\,(1-e^{-\pi s})\left(s^2+1\right)}{(s+1)\left(s^2+1\right)} = \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \; G(s)$$

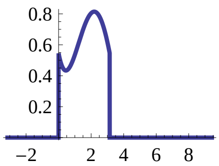
donde

$$G(s) = \frac{(1+e^{-\pi s}) + x_0\,(1-e^{-\pi s})\left(s^2+1\right)}{(s+1)\left(s^2+1\right)} = \frac{\left[1+x_0\left(s^2+1\right)\right] + \left[\,1-x_0\left(s^2+1\right)\right] e^{-\pi s}}{(s+1)\left(s^2+1\right)}$$

El único polo posible de $G(s)$ ocurre en $s=-1$; luego, para que sea analítica, el numerador debe anularse en $s=-1$; para ello encontramos que $x_0 = \frac{1}{2}\,\frac{e^{\pi}+1}{e^{\pi}-1}$. La antitransformada de $G(s)$, es

$$g(t) = \left[\frac{1}{2}\,(\text{sen}\, t - \cos t) + \frac{1}{1-e^{-\pi}}\, e^{-t}\right] e\left(\frac{t}{\pi}\right)$$

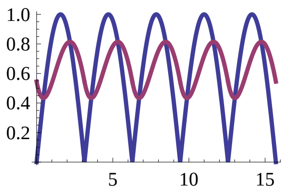
```
g[t_] := Which[t < 0, 0, π < t, 0, True, 1/2 (Sin[t] - Cos[t]) + 1/(1 - ⅇ^-π) ⅇ^-t]
Plot[g[t], {t, -π, 3 π}, PlotStyle → Thick]
```



Entiéndase bién, este es el modelo que, repetido periódicamente con período π, da la solución.

Las gráficas de la entrada y la solución son las siguientes.

```
x[t_] := 1/2 (Sin[t] - Cos[t]) + 1/(1 - e^-π) e^-t
Plot[{Abs[Sin[t]], x[Mod[t, π]]}, {t, 0, 5 π}, PlotStyle → {Thick}]
```



c) El modelo se puede buscar directamente

.

En el intervalo $0 < t < \pi$ verifica $x' + x = \operatorname{sen} t$; luego debe ser de la forma

$$x(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t - \cos t) + k\, e^{-t}$$

Además para periodicidad $x(0) = x(\pi)$; luego $-\frac{1}{2} + k = \frac{1}{2} + k\, e^{-\pi}$; por lo tanto $k = \frac{1}{1-e^{-\pi}}$.

Observemos que, por ser la entrada $|\operatorname{sen} t|$ continua, la solución tiene derivada continua. Lo podemos comprobar en el modelo

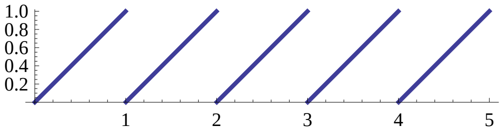
$$x'(0^+) = \frac{1}{2} - k \quad \text{y} \quad x'(\pi^-) = -\frac{1}{2} - k\, e^{-\pi}$$

que son iguales pues $k = \frac{1}{1-e^{-\pi}}$.

Ejemplo 4

Consideremos un circuito en serie $R\,L\,C$ con un voltaje de entrada $v(t) = t\, e(t)$ periódico de período 1 cuya gráfica es la siguiente.

```
Plot[t - Floor[t], {t, 0, 5}, AspectRatio → Automatic, PlotStyle → {Thick}]
```



Si $R = 2\,\Omega$, $L = 1\,H$, $C = 1\,F$ e inicialmente el circuito está inactivo, tomando como variable la diferencia de potencial en el capacitor $v_C(t)$ se tiene el problema $v_C'' + 2\,v_C' + v_C = v(t),\ v_C(0) = v_C'(0) = 0$.
Esperamos una respuesta compuesta de un transitorio y un permanente periódico de período 1.
Además, por ser $v(t)$ continua a trozos, serán $v_C(t)$ y $v_C'(t)$ continuas y v_C'' con puntos angulosos en los números naturales 1, 2, .. . Transformando queda $s^2\,V_C(s) + 2\,s\,V_C(s) + V_C(s) = \frac{1}{1-e^{-s}}\left[\frac{1-(s+1)\,e^{-s}}{s^2}\right]$
Despejando y separando en fracciones simples:

$$V_C(s) = \frac{1}{s^2(s+1)^2} - \frac{e^{-s}}{(1-e^{-s})\,s\,(s+1)^2} = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s(s+1)^2}\sum_{k=1}^{\infty} e^{-k\,s}$$

$$= \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s} + \frac{1}{(s+1)^2} - \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)}\right] e^{-k\,s}$$

Antitransformando la serie término a término se obtiene la solución

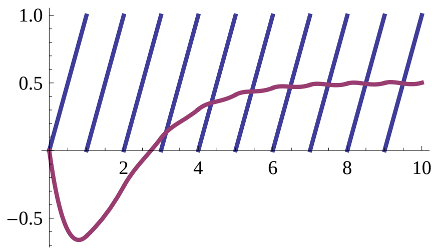
$$v_C(t) = (t - 2 + t\,e^{-t} + 2\,e^{-t})\,u(t) - \sum_{k=1}^{\infty}\left[1 - (t-k)\,e^{-(t-k)} - e^{-(t-k)}\right] u(t-k)$$

Verificamos que es solución en cada intervalo $n < t < n+1$; luego graficamos la entrada y la salida en el intervalo $[0, 10]$.

```
Clear[v, n];
v[t_] := t - 2 - t ⅇ^-t + 2 ⅇ^-t - Sum[(1 - (t - k) ⅇ^-(t-k) - ⅇ^-(t-k)), {k, 1, n}];
v''[t] + 2 v'[t] + v[t] // Simplify
-n + t
```

```
v[t_] := t - 2 - t e^-t + 2 e^-t - Sum[(1 - (t - k) e^-(t-k) - e^-(t-k)) UnitStep[t - k], {k, 1, 20}]
Plot[{t - Floor[t], v[t]}, {t, 0, 10}, PlotRange → All, PlotStyle → {Thick}]
```

$$v[t\_] := t - 2 - t\,e^{-t} + 2\,e^{-t} - \sum_{k=1}^{20}\left(1 - (t-k)\,e^{-(t-k)} - e^{-(t-k)}\right)\text{UnitStep}[t-k]$$

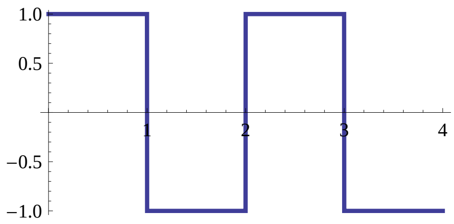


Se aprecia la suavidad del gráfico. Además, medida que el transitorio desaparece, la componente permanente prevalece, y se observa cada vez mejor la periodicidad subyacente.

Ejemplo 5

Consideremos la señal cuadrada de período 2 y modelo $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < t < 1 \\ -1 & \text{si} \quad 1 < t < 2 \end{cases}$ cuya gráfica es:

```
f[t_] := If[0 < t < 1, 1, -1]
Plot[f[Mod[t, 2]], {t, 0, 4}, AspectRatio → Automatic, PlotStyle → {Thick}]
```



La transformada de Laplace del modelo $\int_0^2 f(t)\, e^{-s t}\, dt = \int_0^1 e^{-s t}\, dt - \int_1^2 e^{-s t}\, dt = \frac{(1-e^{-s})^2}{s}$

y la transformada de la función periódica es $F(s) = \frac{1}{1-e^{-2 s}} \frac{(1-e^{-s})^2}{s}$.

Ejercicio

a) La integral $\int_0^t f(\tau)\, d\tau$, de la función $f(t)$ del ejemplo, es un triángulo de período 1.

b) Calcular su transformada de Laplace.

ANEXO I

La transformada de Laplace de una función $f(t)$ de $\mathcal{F}_e$ se puede extender a una función analítica en un semiplano del tipo Re(z) > r . En efecto, si $| f(t) | \leqslant k\, e^{\alpha t}$, sea $z = s + i\omega$ y $s > \alpha$ entonces

$$| f(t)\, e^{-z t}| = \left| f(t)\, e^{-s t}\, e^{-i t \omega} \right| \leqslant k\, e^{-(s-\alpha) t}$$

y la integral

$$\mathcal{L}(f)\,(z) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-z t}\, dt$$

converge absolutamente y define una función de z en el semiplano Re(z) > α . Usando convergencia dominada, se ve que tiene derivadas parciales que verifican las condiciones de Cauchy-Riemann, y por lo tanto es analítica en ese semiplano.

Ejemplo $\mathcal{L}\left(\left(t^2 - 1\right) e^{-2 t}\right)(z) = \frac{2}{(z+2)^3} - \frac{1}{z+2}$ analítica en $z \neq -2$

$\mathcal{L}(t\, u(t-1))\,(z) = \frac{z+1}{z^2}\, e^{-z}$ analítica en $z \neq 0$

$\mathcal{L}(e(t))(s) = \frac{1-e^{-z}}{z}$ es analítica en todo el plano

Este último es un caso particular del siguiente

Teorema

La transformada de Laplace compleja de una función $f(t)$ de soporte compacto es analítica en todo el plano complejo.

Demostración

Si $f(t)$ es nula para $t > a$ se tiene $\mathcal{L}(f)(z) = \int_0^a f(t)\, e^{-z\,t}\, dt$ para cada z .

Razonando como antes resulta derivable en todo el plano con derivada $\mathcal{L}(f)'(z) = \int_0^a -t\, f(t)\, e^{-z\,t}\, dt$.

Otra demostración es utilizando el desarrollo de Taylor de la exponencial, que converge uniformemente en compactos:

$$e^{-z\,t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-z\,t)^k$$

y por lo tanto se puede integrar término a término

$$\mathcal{L}(f)(z) = \int_0^a f(t)\, e^{-z\,t}\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\int_0^a f(t)\, t^k\, dt\right) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} m_k\, z^k \quad \text{con} \quad m_k = \int_0^a f(t)\, t^k\, dt$$

Calculamos su radio de convergencia. Sea $|f(t)| \leqslant M$, entonces $|m_k| = \left|\int_0^a f(t)\, t^k\, dt\right| \leqslant \frac{M}{(k+1)} a^{k+1}$

Luego la serie está acotada en valor absoluto por la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M}{(k+1)} a^{k+1} z^k$. Por el criterio del cociente,

el radio de convergencia de esta última es infinito. Luego el radio de convergencia de $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} m_k\, z^k$

también es infinito.

q.e.d.

Además, verifica una acotación en ∞ vinculada al intervalo $[0, a]$ soporte de $f(t)$:

$$|\mathcal{L}(f)(z)| = \left|\int_0^a f(t)\, e^{-z\,t}\, dt\right| \leqslant M \int_0^a e^{-\mathrm{Re}(z)\,t}\, dt \leqslant M\, a\, e^{-\mathrm{Re}(z)\,a}$$

Corolario

Sea $f(t)$ de período $p > 0$ con transformada de Laplace compleja

$$\mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{1-e^{-z\,p}} \int_0^p f(t)\, e^{-z\,t}\, dt = \frac{1}{1-e^{-z\,p}}\, G(z)$$

Entonces la transformada del modelo $G(z) = \int_0^p f(t)\, e^{-z\,t}\, dt$ es analítica en todo el plano y verifica una acotación en ∞ del tipo $|G(z)| \leqslant K\, e^{-\mathrm{Re}(z)\,p}$.

Vale la recíproca, según el teorema de Paley-Wiener, que se puede demostrar usando la fórmula de inversión, que se dará en la unidad 4.

ANEXO II

Lema

Sea $x(t) = \sum_{i=1}^{r} p_i(t)\, e^{\alpha_i t}$ con $p_i(t)$ polinomios y los α_i son números complejos distintos.
Si la transformada de Laplace de $x(t)$ es 0 : $\mathfrak{L}(x)\,(s) = 0$ entonces $x(t) = 0$.

Demostración

Usando $\mathfrak{L}\left[\left(c_0 + c_1\, t + \ldots + \frac{c_n}{n!}\, t^n\right) e^{\alpha t}\right](s) = \frac{c_0}{s-\alpha} + \frac{c_1}{(s-\alpha)^2} + \ldots + \frac{c_n}{(s-\alpha)^n}$

y si $p_i(t) = \sum_{k=0}^{n_i} \frac{c_{ik}}{k!}\, t^k$ se tiene $0 = \mathfrak{L}(x)\,(s) = \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{k=0}^{n_i} \frac{c_{ik}}{(s-\alpha_i)^k}\right)$

que es un desarrollo en fracciones simples alrededor de los polos α_i que da la función nula.
Vamos a demostrar que cada coeficiente c_{ik} es nulo. En efecto, multiplicando por $(s-\alpha_i)^{k-1}$ e integrando en una circunferencia de radio pequeño $C_\epsilon(\alpha_i)$ obtenemos $2\pi i\, c_{ik} = 0$.

q.e.d.

Teorema

Sean $\mathcal{L}(x) = a_n\, x^{(n)} + \ldots + a_0\, x$ y $\mathcal{M}(y) = b_m\, y^{(m)} + \ldots + b_0\, y$ dos operadores diferenciales lineales con coeficientes constantes y $f(t)$ una función que tiene sus m primeras derivadas en $\mathcal{F}_e$.

a) Cada solución de la ecuación $\mathcal{L}(x) = \mathcal{M}(f)$ está en $\mathcal{F}_e$ junto con sus n primeras derivadas.

b) Si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son soluciones de la misma ecuación $\mathcal{L}(x) = \mathcal{M}(f)$ y tienen la misma transformada de Laplace entonces coinciden: $x_1(t) = x_2(t)$.

Demostración

Es suficiente considerar el caso de $\mathcal{M}(y) = y$.

a) Sea $f(t)$ en $\mathcal{F}_e$ y $x(t)$ una solución de $\mathcal{L}(x) = f$.

Sabemos que $x(t) = x_0(t) + x_p(t)$ con $x_0(t)$ una solución de la homogénea $\mathcal{L} = 0$ y $x_p(t)$ una solución particular de la no homogénea.

Por un lado $x_0(t) = \sum_{i=1}^{r} p_i(t)\, e^{\alpha_i t}$ pertenece a $\mathcal{F}_e$ junto con todas sus derivadas.

Por otro lado $x_p(t) = f(t) * h(t)$ con $h(t)$ la respuesta al impulso unitario. Y como

$$|f(t)| \leqslant k\, e^{\beta t} \quad \text{y} \quad |h(t)| \leqslant K\, e^{\gamma t}$$

resulta

$$|x_p(t)| = \left|\int_0^t f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau\right| \leqslant k\, K \int_0^t e^{(\beta+\gamma)\, t}\, dt = k\, K\, \frac{1}{\beta+\gamma}\left[e^{(\beta+\gamma)\, t} - 1\right]$$

y entonces x_p también pertenece al espacio vectorial $\mathcal{F}_e$.

Como $h(t)$ tiene las primeras $n-2$ derivadas continuas y la $h^{(n-1)}(t)$ tiene un salto finito en el origen se tiene que $x_p' = h' * f$, ..., $x_p^{(n)} = h^{(n-1)} * f$ son continuas y como antes se ve que están en $\mathcal{F}_e$.

Además $h^{(n)}(t) = a_n^{-1}\, \delta(t)$ + función de $\mathcal{F}_e$ y entonces $x_p^{(n)} = h^{(n)} * f = a_n^{-1}\, f(t)$ + función continua y por ello pertenece a $\mathcal{F}_e$.

b) Si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ satisfacen la misma ecuación $\mathcal{L}(x) = \mathcal{M}(f)$ y sus transformadas coinciden $\mathfrak{L}(x_1)(s) = \mathfrak{L}(x_2)(s)$, la diferencia $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ satisface la ecuación homogénea $\mathcal{L}(x) = 0$ y tiene transformada nula: $\mathfrak{L}(x)(s) = 0$. Luego es de la forma $x(t) = \sum_{i=1}^{r} p_i(t)\, e^{\alpha_i t}$ y por el lema anterior $x(t) = 0$.

q.e.d.

Corolario

Sean $\mathcal{L}(x) = a_n x^{(n)} + ... + a_0 x$ y $\mathcal{M}(y) = b_m y^{(m)} + ... + b_0 y$ dos operadores diferenciales lineales con coeficientes constantes y $f(t)$ una función que tiene sus m primeras derivadas en $\mathcal{F}_e$.
Sea $X(s)$ la transformada de Laplace del problema:

$$\begin{cases} \mathcal{L}(x) = \mathcal{M}(f) \\ x(0) = x_0,\ x'(0) = x_0',\ ...,\ x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Si por algún procedimiento encontramos una $x(t)$ en $\mathcal{F}_e$ cuya transformada de Laplace es $X(s)$ entonces $x(t)$ es la solución del problema.

Este resultado se usa en la solución de problemas mediante la Transformada de Laplace.

Ejemplo 1

Sea el problema $\begin{cases} x'' + 2x' + x = f' - 2f \\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0 \end{cases}$ con $f(t) = t\,u(t)$.

Como $f'(t) = u(t)$, transformando Laplace obtenemos:

$$s\,[s\,X(s) - x(0)] - x'(0) + 2\,[s\,X(s) - x(0)] + X(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s^2}$$

Despejando queda

$$X(s) == \frac{s^3+s^2+2s-2}{s^2(s+1)^2} = -\frac{2}{s^2} + \frac{6}{s} - \frac{4}{(s+1)^2} - \frac{5}{s+1}$$

Una función cuya transformada de Laplace da $X(s)$ es:

$$x(t) = -2\,t + 6 - 4\,t\,e^{-t} - 5\,e^{-t}$$

que por el teorema es la solución del problema.

Ejemplo 2

Un circuito $R\,L\,C$ en serie tiene un voltaje de entrada $v(t)$. La ecuación que satisface la corriente $i(t)$, suponiendo que el capacitor está inicialmente descargado, es

$$L\,i\,' + R\,i + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau$$

Si las constantes son $L = 1\,H$, $R = 2\,\Omega$, $C = \frac{1}{4}F$, $v(t) = \text{sen}\ t$ Vols e inicialmente la corriente es nula, se tiene el problema: $i\,' + 2\,i + 4\int_0^t i(\tau)\,d\tau = \text{sen}\,t,\ i(0) = 0$

Transformando Laplace obtenemos: $s\,I(s) + 2\,I(s) + 4\,\frac{I(s)}{s} = \frac{1}{s^2+1}$ y despejando

$$I(s) = \frac{s}{\left(s^2+1\right)(s+2)^2} = -\frac{2}{5\,(s+2)^2} - \frac{3}{25\,(s+2)} + \frac{3\,s+4}{s^2+1}$$

Luego una función cuya transformada es $I(s)$ es:

$$i(t) = -\frac{2}{5}\,t\,e^{-2\,t} - \frac{3}{25}\,e^{-2\,t} + 3\cos t + 4\,\text{sen}\,t$$

que según el teorema debe ser la solución del problema.
Observación. Notamos que derivando la ecuación se tiene $i\,'' + 2\,i\,' + 4\,i = \cos t$, $i(0) = 0$ y de la misma ecuación resulta $i\,'(0) = 0$. Resolviendo este problema llegaremos naturalmente a la misma solución.

ANEXO III

Hacemos algunos comentarios respecto de cómo son las transformadas de Laplace de funciones de $\mathcal{F}_e$.

a_1) Si una función $f(t)$ tiene soporte compacto se demostró en el Anexo I que $\mathfrak{L}(f)$ es analítica en el plano.

Por ejemplo: $\mathfrak{L}(e(t))(z) = \int_0^1 e^{-z\,t}\,dt = \frac{1-e^{-z}}{z}$ es analítica en todo el plano complejo.

a_2) La transformada de $f_n(t) = e\left(\frac{t}{n}\right)$ es $\int_0^n e^{-z\,t}\,dt = \frac{1-e^{-n\,z}}{z}$ es analítica en todo el plano.
Si $n \to \infty$, $f_n(t) \to u(t)$ y $\mathfrak{L}(f_n)(z) \to \frac{1}{z}$ que tiene un polo simple.

La transformada de $g_n(t) = e\left(\frac{t}{n}\right)\text{sen}\ t$ es analítica en todo el plano y converge a $\frac{1}{s^2+1}$ que tiene dos polos simples.

b) Consideremos una función del tipo

$$F(z) = \sum_{i=1}^{m} R_i(z)\, e^{\lambda_i z}$$

donde cada $R_i(z) = \frac{p_i(z)}{q_i(z)}$ es una función racional propia, es decir, el grado del numerador es menos que el grado del denominador, y los λ_i son números reales negativos o nulos. En esas condiciones se verifica $\lim_{s\to+\infty} F(s) = 0$ y $F(s)$ es la transformada de Laplace de una función de $\mathcal{F}_e$. En efecto, basta descomponer en fracciones simples cada $R_i(z)$ y tener en cuenta que la exponencial negativa significa atraso de las funciones correspondientes.

ANEXO IV

Transformada de Laplace de funciones generalizadas.

Para $t_0 > 0$ se tiene $\mathfrak{L}(\delta(t-t_0))\,(s) = \int_0^\infty \delta(t-t_0)\, e^{-s t}\, dt = e^{-s t_0}$ y

$$\mathfrak{L}(\delta\,'(t-t_0))\,(s) = \int_0^\infty \delta\,'(t-t_0)\, e^{-s t}\, dt = -\int_0^\infty \delta(t-t_0)\,(-s)\, e^{-s t}\, dt = s\, e^{-s t_0}$$

En general se tiene

$$\mathfrak{L}(\delta^{(n)}(t-t_0))\,(s) = s^n\, e^{-s t_0} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \text{ si } \quad t_0 > 0\,.$$

Tomando límite a derecha para $t_0 \to 0^+$ se obtiene la llamada "Transformada de Laplace de $\delta(t)$ a derecha"

$$\mathfrak{L}(\delta) = 1\,,\ \ \mathfrak{L}(\delta\,') = s\,,\ \ \mathfrak{L}(\delta\,'') = s^2,\ \ldots$$

Este resultado se puede obtener también directamente. Por ejemplo, para la δ se tiene

$$\mathfrak{L}(\delta)\,(s) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \mathcal{L}(e_\epsilon(t))\,(s) = \lim_{\epsilon\to 0^+} \int_0^\epsilon \frac{1}{\epsilon}\, e^{-s t}\, dt = \lim_{\epsilon\to 0^+}\left[\frac{1-e^{-\epsilon s}}{\epsilon s}\right] = 1$$

No verifica la propiedad 5 pues $\lim_{s\to+\infty} \mathfrak{L}(\delta)\,(s) = 1$.

Consideremos un problema

$$a_2\, x'' + a_1\, x' + a_0\, x = b_1\, f\,'(t) + b_0\, f(t),\ x(0) = 0,\ x\,'(0) = 0$$

Si transformamos Laplace y suponemos $f(0) = 0$ obtenemos $X(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} F(s)$

Si la entrada es $f(t) = \delta(t)$, se tiene la transformada de la respuesta al impulso unitario

$$\mathfrak{L}(h(t))\,(s) = H(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \qquad \text{y entonces} \qquad \frac{X(s)}{F(s)} = H(s)$$

La función $H(s)$ es la función de transferencia del sistema.

ECUACIONES DE CONVOLUCIÓN - DECONVOLUCIÓN

A. Ecuaciones de convolución

Una ecuación del tipo

$$x(t) = a(t) + \int_0^t x(\tau)\, b(t-\tau)\, d\tau$$

con $a(t)$, $b(t)$ funciones dadas y $x(t)$ incógnita se llama de convolución.
Si se busca una solución en $t \geqslant 0$ se puede emplear la transformada de Laplace.

Ejemplo $\quad x(t) = t + \int_0^t x(\tau) \cos(t-\tau)\, d\tau$ para $t \geqslant 0$

Transformando Laplace queda $\quad X(s) = \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1} X(s)$ y despejando la incógnita

$$X(s) = \frac{s^2+1}{s^2\left(s^2-s+1\right)} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} - \frac{s-\frac{1}{2}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

y antitransformando queda

$$x(t) = t + 1 - e^{\frac{1}{2} t} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{\frac{1}{2} t} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} t$$

Observemos que de la misma ecuación se obtienen las condiciones $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$,
que son verificadas por la función hallada. Comprobamos que $x(t)$ es solución.

```
x[t_] := t + 1 - e^(1/2 t) Cos[Sqrt[3]/2 t] + 1/Sqrt[3] e^(1/2 t) Sin[Sqrt[3]/2 t]
x[t] - t - ∫_0^t x[τ] Cos[t - τ] dτ // Simplify
0
```

Nota
La ecuación anterior también se puede resolver derivándola dos veces y hallando la ecuación diferencial que satisface la incógnita $x(t)$ junto con las condiciones iniciales.

Ejercicio
Resolver la ecuación $\quad x(t) = 1 - \int_0^t x(\tau)\,(t-\tau)\, d\tau$ para $t \geqslant 0$ y comprobar la solución hallada.

De la ecuación resulta que $x(0) = 1$. Rta: $x(t) = \cos t$

Ejercicio
Resolver la ecuación $x(t) = \operatorname{sen} t\, u(t) + x(t) * u(t)$ en $t \geq 0$ y comprobar la solución.
Rta: $x(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t - \cos t + e^{t})\, u(t)$

Ejercicio
Resolver la ecuación $x(t) = e(t) + x(t) * e^{-t} u(t)$ en $t \geq 0$ y comprobar la solución.
Rta: $x(t) = (1 + t)\, e(t) + u(t - 1)$

Ejercicio
Resolver la ecuación $x'(t) = u(t) - x(t) * e^{-2t} u(t)$, $x(0) = 0$, en $t \geq 0$, y comprobar la solución.
Rta: $x(t) = (2 - t e^{-t} - 2 e^{-t})\, u(t)$

B. Deconvolución

Una ecuación de la forma $x * a = b$ con $a(t)$, $b(t)$ funciones dadas y $x(t)$ incógnita se llama "ecuación de deconvolución". Si suponemos que las funciones son causales y queremos resolverla en $t \geqslant 0$ podemos usar la transformada de Laplace.

Ejemplo 1

Consideremos la ecuación $x * \cos t = t$

Transformando queda $X(s)\ \frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s^2} \Rightarrow X(s) = \frac{s^2+1}{s^3} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3} \Rightarrow x(t) = 1 + \frac{1}{2} t^2$

Comprobamos que verifica la ecuación. Para $t \geqslant 0$:

$$\int_0^t \left(1 + \frac{1}{2}\tau^2\right) \mathrm{Cos}[t - \tau]\, d\tau$$

t

Ejemplo 2

Consideremos la ecuación $x * \operatorname{sen} t = t$

Transformando queda $X(s)\ \frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{s^2} \Rightarrow X(s) = \frac{s^2+1}{s^2} = 1 + \frac{1}{s^2} \Rightarrow x(t) = \delta(t) + t$

Comprobamos que verifica la ecuación. Para $t \geqslant 0$:

```
Sin[t] + ∫_0^t τ Sin[t - τ] dτ
```

```
t
```

Ejemplo 3

Consideremos el problema $x' + x = f(t)$, $x(0) = 0$
Hallar la entrada $f(t)$ que produce la salida $x(t) = 1 - \cos t$.
Método directo: usando la derivada generalizada obtenemos $x' + x = \operatorname{sen} t + 1 - \cos t$
Método indirecto: por convolución con $h(t) = e^{-t}\, u(t)$, se obtiene una ecuación de deconvolución
$e^{-t}\, u(t) * f = 1 - \cos t$ en $t \geqslant 0$. Transformando Laplace queda $F(s) = \frac{1}{s} + \frac{1-s}{s^2+1}$ y entonces
$f(t) = 1 + \operatorname{sen} t - \cos t$.

Ejercicio

Resolver a) $x * \operatorname{sen} t = t$ b) $x * u(t) = t\, e^{-t}$ c) $\cos t * x(t) = u(t)$.
Comprobar las soluciones halladas.

Ejercicio

Resolver la ecuación $x * x = u(t)$, $t > 0$.

Rta. $x(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$

SISTEMAS LINEALES Y TRANSFORMADA DE LAPLACE

Consideremos un sistema de dos ecuaciones diferenciales lineales con dos incógnitas y coeficientes constantes, con una entrada $f(t)$ y condiciones iniciales:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + b_1\, f(t) \\ x_2' = a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + b_2\, f(t) \end{cases} \quad \text{con } x_1(0) = x_{10}\ ;\ x_2(0) = x_{20}$$

Transformando Laplace obtenemos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas $X_1(s)$, $X_2(s)$.
Resolviendo el sistema algebraico y antitransformando obtenemos la solución $x_1(t)$, $x_2(t)$.

Ejemplo 1

Sea $\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = 2x + y \end{cases}$ con $x(0) = -1$; $y(0) = 0$

Transformando Laplace, queda un sistema lineal algebraico:

$$\begin{cases} s\,X(s) + 1 = 4\,X(s) - Y(s) \\ s\,Y(s) = 2\,X(s) + Y(s) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (s-4)\,X(s) + Y(s) = -1 \\ -2\,X(s) + (s-1)\,Y(s) = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema lineal queda $\begin{cases} X(s) = \frac{-s+1}{(s-3)(s-2)} = -\frac{2}{s-3} + \frac{1}{s-2} \\ Y(s) = \frac{-2}{(s-3)(s-2)} = -\frac{2}{s-3} + \frac{2}{s-2} \end{cases}$

Antitransformando obtenemos la solución $(x(t),\ y(t)) = \left(-2\,e^{3t} + e^{2t},\ -2\,e^{3t} + 2\,e^{2t}\right)$.
Comprobamos que verifican las ecuaciones y las condiciones iniciales.

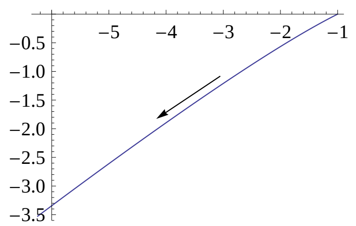
```
x[t_] := -2 ⅇ^(3 t) + ⅇ^(2 t)
y[t_] := -2 ⅇ^(3 t) + 2 ⅇ^(2 t)
{x'[t] - 4 x[t] + y[t], y'[t] - 2 x[t] - y[t]} // Simplify
{x[0], y[0]}
```

```
{0, 0}

{-1, 0}
```

La gráfica de la solución es una curva paramétrica en el plano.

```
ParametricPlot[{-2 ⅇ^(3 t) + ⅇ^(2 t), -2 ⅇ^(3 t) + 2 ⅇ^(2 t)}, {t, 0, 0.5}]
```



Ejemplo 2

Sea el sistema $\begin{cases} x' = y + e^{-t} \\ y' = -5x - 2y \end{cases}$ con $x(0) = y(0) = 0$

Transformando queda $\begin{cases} s\,X(s) = Y(s) + \frac{1}{s+1} \\ s\,Y(s) = -5\,X(s) - 2\,Y(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(s) = \frac{s+2}{(s+1)\left(s^2+2s+5\right)} \\ Y(s) = \frac{-5}{(s+1)\left(s^2+2s+5\right)} \end{cases}$

En el denominador, el factor $s^2 + 2s + 5$ tiene raíces complejas. Para antitransformar expresamos las transformadas como suma de formas reconocibles en la tabla:

$$X(s) = A\,\frac{1}{s+1} + B\,\frac{s+1}{(s+1)^2+4} + C\,\frac{2}{(s+1)^2+4} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{s+1} - \frac{1}{4}\,\frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{1}{2}\,\frac{2}{(s+1)^2+4}$$

$$Y(s) = a\,\frac{1}{s+1} + b\,\frac{s+1}{(s+1)^2+4} + c\,\frac{2}{(s+1)^2+4} = -\frac{5}{4}\,\frac{1}{s+1} + \frac{5}{4}\,\frac{s+1}{(s+1)^2+4}$$

Luego $(x(t),\ y(t)) = \left(\frac{1}{4}\,e^{-t} - \frac{1}{4}\,e^{-t}\cos 2t + \frac{1}{2}\,e^{-t}\,\mathrm{sen}\,2t\ ,\ -\frac{5}{4}\,e^{-t} + \frac{5}{4}\,e^{-t}\cos 2t\right)$ cuya gráfica es

```
ParametricPlot[{1/4 e^-t - 1/4 e^-t Cos[2 t] + 1/2 e^-t Sin[2 t], -5/4 e^-t + 5/4 e^-t Cos[2 t]}, {t, 0, 6}];
```

Ejercicio

Resolver $X' = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} u(t) \quad , \quad X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y graficar la solución obtenida.

Método general

La transformada de Laplace de un sistema de orden n $\quad X' = A\,X + B\,f(t),\ X(0) = X_0$ es

$$s\,X(s) - X_0 = A\,X(s) + B\,F(s) \qquad \Rightarrow \qquad (s\,I - A)\,X(s) = X_0 + B\,F(s) \qquad \Rightarrow$$

$$X(s) = (s\,I - A)^{-1}\,X_0 + (s\,I - A)^{-1}\,B\,F(s)$$

En el segundo miembro, el primer término corresponde a la solución del sistema homogéneo con las condiciones iniciales, y el segundo término corresponde a la respuesta forzada por $f(t)$, con condiciones iniciales nulas.

El polinomio característico del sistema es $p_A(s) = \det(s\,I - A)$ y la matriz adjunta

$$\mathrm{Adj}(s\,I - A) = \left(q_{i\,j}(s)\right)^T = \left(q_{j\,i}(s)\right)$$

cuyos elementos son los cofactores $q_{j\,i}(s)$, que son polinomios de grado menor que n . La matriz inversa es

$$(s\,I - A)^{-1} = \frac{1}{\det(s\,I-A)}\,\mathrm{Adj}(s\,I - A)$$

Ejemplo 1

Para el sistema homogéneo $X' = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$ con condicioes iniciales $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ se tiene

$$p_A(s) = \det(s\,I - A) = \det\begin{pmatrix} s-2 & 1 & 0 \\ -1 & s+1 & -1 \\ 1 & 0 & s-1 \end{pmatrix} = s^2(s-2)$$

$$\mathrm{Adj}(s\,I - A) = \mathrm{Adj}\begin{pmatrix} s-2 & 1 & 0 \\ -1 & s+1 & -1 \\ 1 & 0 & s-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^2-1 & s-2 & -s-1 \\ -s+1 & s^2-3\,s+2 & 1 \\ -1 & s-2 & s^2-\ s-1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} s^2-1 & -s+1 & -1 \\ s-2 & s^2-3\,s+2 & s-2 \\ -s-1 & 1 & s^2-\ s-1 \end{pmatrix}$$

$$(s\,I - A)^{-1} = \frac{1}{s^2(s-2)}\begin{pmatrix} s^2-1 & -s+1 & -1 \\ s-2 & s^2-3\,s+2 & s-2 \\ -s-1 & 1 & s^2-\ s-1 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que es la inversa.

```
Clear[s]; (s-2  1  0; -1  s+1  -1; 1  0  s-1) . (s^2-1  -s+1  -1; s-2  s^2-3s+2  s-2; -s-1  1  s^2-s-1) // Simplify // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} (-2+s)\,s^2 & 0 & 0 \\ 0 & (-2+s)\,s^2 & 0 \\ 0 & 0 & (-2+s)\,s^2 \end{pmatrix}$$

La transformada de la solución es

$$X(s) = \frac{1}{s^2(s-2)} \begin{pmatrix} s^2-1 & -s+1 & -1 \\ s-2 & s^2-3\,s+2 & s-2 \\ -s-1 & 1 & s^2-\ s-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{s^2(s-2)} \begin{pmatrix} s^2 \\ 0 \\ -s^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s-2} \\ 0 \\ -\frac{1}{s-2} \end{pmatrix}$$

Finalmente la solución es

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ -e^{2t} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2

Sea el sistema $\quad X' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos t \quad$ con condiciones iniciales $\quad X_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix}$ arbitrarias.

Se tiene

$$(s\,I-A)^{-1} = \begin{pmatrix} s+1 & -2 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{pmatrix} s+1 & 2 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}$$

Luego

$$(s\,I-A)^{-1}\,x_0 = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{pmatrix} s+1 & 2 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_{01}}{s+1} + \frac{2\,x_{02}}{(s+1)^2} \\ \frac{x_{02}}{s+1} \end{pmatrix} = x_{01} \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} \\ 0 \end{pmatrix} + x_{02} \begin{pmatrix} \frac{2}{(s+1)^2} \\ \frac{1}{s+1} \end{pmatrix}$$

$$(s\,I-A)^{-1}\,B\,F(s) = \frac{1}{(s+1)^2} \begin{pmatrix} s+1 & 2 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{s}{s^2+1} = \frac{s}{(s+1)^2\,(s^2+1)} \begin{pmatrix} -s+1 \\ s+1 \end{pmatrix}$$

Descomponemos en fracciones simples cada componente

$$\frac{s(-s+1)}{(s+1)^2\left(s^2+1\right)} = -\frac{1}{2}\,\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{s+1}$$

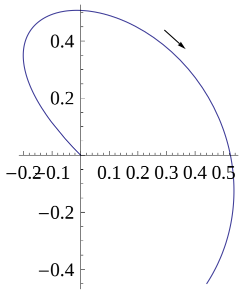
$$\frac{s}{(s+1)\left(s^2+1\right)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{2}\,\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{s+1}$$

Antitransformando obtenemos la solución general:

$$x(t) = x_{01}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} e^{-t} + x_{02}\begin{pmatrix}2\,t\\1\end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} t + \frac{1}{2}(1-2\,t)\,e^{-t}\\ \frac{1}{2}\left(\cos t + \operatorname{sen} t - e^{-t}\right)\end{pmatrix}$$

La suma de los dos primeros términos es la solución general de la homogénea con las condiciones iniciales.
El último es la respuesta al sistema forzado por $f(t) = \cos t$ con condiciones iniciales nulas y su gráfica es

```
ParametricPlot[{-1/2 Cos[t] + 1/2 Sin[t] + 1/2 (1 - 2 t) e^-t, 1/2 (Cos[t] + Sin[t] - e^-t)}, {t, 0, 3}]
```



Si el sistema está inicialmente relajado y le aplicamos el impulso unitario $X' = A\,X + B\,\delta(t)$, $X(0^-) = 0$, la respuesta es $h(t)$. Como $\mathcal{L}(\delta) = 1$, la transformada de $h(t)$ es $H(s) = (s\,I - A)^{-1}\,B$.

Más concretamente:

$$h(t) = \begin{pmatrix}h_1(t)\\h_2(t)\\\ldots\\h_n(t)\end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{L}(h)\,(s) = H(s) = \begin{pmatrix}H_1(s)\\H_2(s)\\\ldots\\H_n(s)\end{pmatrix}$$

Para $X' = A X + B f(t),\ X(0^-) = 0$ es

$$X(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \ldots \\ X_n(t) \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad X(s) = \begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ .. \\ X_n(s) \end{pmatrix} = H(s).F(s)$$

Luego $X_i(s) = H_i(s) F(s)$ y por lo tanto $X_i(t) = h_i(t) * f(t)$ que simbolizamos

$$x(t) = h(t) * f(t) \qquad \text{y} \qquad X(s) = H(s) F(s)$$

Además

$$\frac{X(s)}{F(s)} = H(s)$$

La función vectorial $H(s)$, que es la transformada del impulso unitario, es justamente la función de transferencia del sistema. La igualdad anterior se expresa en palabras así:

"La transformada de la salida sobre la transformada de la entrada es igual a la transferencia del sistema"+

Nota

En la unidad 1 demostramos que cada solución de la ecuación homogénea es una suma de vectores polinomiales multiplicados por exponenciales características. Esto se puede ver también desde la expresión anterior. En efecto, las soluciones de la ecuación homogénea tienen transformada

$$X_0(s) = (s I - A)^{-1} X_0 = \frac{1}{p_A(s)} \operatorname{Adj}(s I - A) X_0 = \frac{1}{p_A(s)} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} q_{1\,j}(s)\ x_{0\,j} \\ \sum_{j=1}^{n} q_{2\,j}(s)\ x_{0\,j} \\ \ldots \\ \sum_{j=1}^{n} q_{n\,j}(s)\ x_{0\,j} \end{pmatrix}, \ \text{si} \ X_0 = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \ldots \\ x_{0\,n} \end{pmatrix}$$

Descomponiendo en fracciones simples y antitransformando obtenemos las soluciones de la homogénea que resultan ser sumas de vectores polinomiales por exponenciales

$$X_0(t) = P(t)\, e^{\lambda t}$$

donde λ es una raíz característica de A y $P(t)$ es un vector polinomial de grado $<$ multiplicidad de λ.

ECUACIÓN DE UNA SALIDA

Sea el sistema de orden n : $x' = A\,x + B\,f(t)$ y consideramos una salida lineal $y = C\,x + d\,f(t)$.
Mediante la transformada de Laplace podemos hallar la ecuación de la salida.
En efecto, transformando Laplace y poniendo las condiciones iniciales nulas, se tiene:

$$X(s) = (s\,I - A)^{-1}\,B\,F(s) \quad \Rightarrow \quad Y(s) = C\,X(s) + d\,F(s) = C\,(s\,I - A)^{-1}\,B\,F(s) + d\,F(s)$$

La matriz inversa se calcula con la adjunta $(s\,I - A)^{-1} = \frac{1}{\det(s\,I - A)}\ \mathrm{Adj}(s\,I - A)$

Multiplicando por $\det(\,s\,I - A\,) = s^n + a_1\,s^{n-1} + \ldots + a_n$ queda la expresión

$$\det(\,s\,I - A\,)\,Y(s) = C\ \mathrm{Adj}(s\,I - A)\ B\,F(s) + \det(s\,I - A)\ d\,F(s)$$

Es decir, se tiene

$$p_A(s) = s^n + a_1\,s^{n-1} + \ldots + a_n \quad \text{polinomio de grado } n$$

y $\quad q(s) = C\ \mathrm{Adj}(s\,I - A)\ B \qquad$ polinomio de grado $\leq n - 1$

tales que

$$p_A(s)\ Y(s) = q(s)\,F(s) + d\ p_A(s)\ F(s)$$

Teniendo en cuenta que las condiciones iniciales son nulas se tiene

$$\mathfrak{L}(y') = s\,\mathfrak{L}(y)\,,\ \mathfrak{L}(y'') = s^2\,\mathfrak{L}(y)\,,\ \ldots\,..,\ \ \mathfrak{L}\left(y^{(k)}\right) = s^k\,\mathfrak{L}(y)$$

$$\Rightarrow \quad \mathfrak{L}\left(a_k\,y^{(k)} + \ldots + a_1\,y' + a_0\,y\right) = \left(a_k\,s^k + \ldots + a_1\,s + a_0\right)\mathfrak{L}(y)$$

Luego antitransformando obtenemos la ecuación para la salida

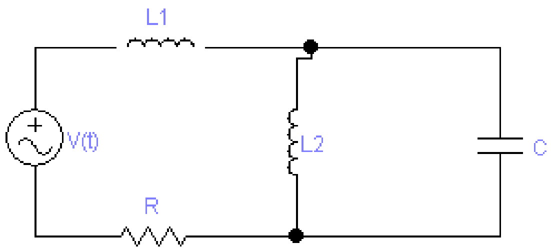
$$y^{(n)} + a_1\,y^{(n-1)} + \ldots. + a_n\,y = d\ f^{(n)}(t) + b_1\ f^{(n-1)}(t) + \ldots. + b_n\ f(t)$$

Observación.

Si la salida es una de las variables, digamos $y = x_i$, podemos aplicar directamente la regla de Cramer al sistema $(s\,I - A)\,X(s) = B\,F(s)$ para obtener la transformada $X_i(s)$ de $y = x_i$. Esto ocurre en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 1

En el circuito siguiente, queremos hallar la ecuación de la caída de potencial en la resistencia.



El sistema que verifican las corrientes i_1, i_2 en las bobinas y la caída de potencial en el capacitor v_C es

$$\begin{pmatrix} i_1' \\ i_2' \\ v_C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} v(t)$$

y la salida es $v_R = R\, i_1$. La transformada de Laplace del sistema y su polinomio característico son

$$\begin{pmatrix} s+\frac{R}{L_1} & 0 & \frac{1}{L_1} \\ 0 & s & -\frac{1}{L_2} \\ -\frac{1}{C} & \frac{1}{C} & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ V_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} V(s) \quad \text{y} \quad p_A(s) = s^3 + \frac{R}{L_1} s^2 + \frac{1}{C}\left(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}\right) s + \frac{R}{C\, L_1\, L_2}\,.$$

Mediante la regla de Cramer despejamos I_1:

$$p_A(s)\; I_1(s) = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{L_1} V(s) & 0 & \frac{1}{L_1} \\ 0 & s & -\frac{1}{L_2} \\ 0 & \frac{1}{C} & s \end{pmatrix} = \frac{1}{L_1} V(s) \left[s^2 + \frac{1}{C\, L_2} \right]$$

Antitransformando obtenemos la ecuación de i_1

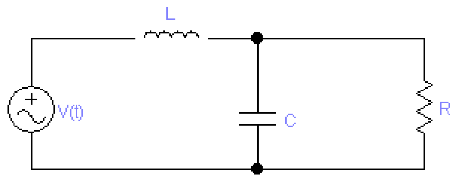
$$i_1''' + \frac{R}{L_1} i_1'' + \frac{1}{C}\left(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}\right) i_1' + \frac{R}{C\, L_1\, L_2} i_1 = \frac{1}{L_1} V''(t) + \frac{1}{C\, L_1\, L_2} V(t)$$

y multiplicando por R queda la ecuación de la salida $v_R = R\, i_1$:

$$v_R''' + \frac{R}{L_1} v_R'' + \frac{1}{C}\left(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}\right) v_R' + \frac{R}{C\, L_1\, L_2} v_R = \frac{R}{L_1} V''(t) + \frac{R}{C\, L_1\, L_2} V(t)$$

Ejemplo 2

Sea el circuito de la figura en el cual la entrada es el voltaje $V(t)$ y la salida es la caída de potencial en la bobina.
Planteamos el sistema que satisfacen i_L , v_C y la salida $y = -v_C + v(t)$ y transformamos Laplace.



Se tiene $\begin{pmatrix} i_L' \\ v_C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_L \\ v_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix} V(t)$ y $\begin{pmatrix} s & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & s + \frac{1}{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_L \\ V_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix} V(s)$

Despejamos V_C por la regla de Cramer $\left(s^2 + \frac{1}{RC} s + \frac{1}{LC}\right) V_C(s) = \frac{1}{LC} V(s)$

La transformada de la salida es: $Y(s) = -V_C(s) + V(s)$ luego

$$\left(s^2 + \frac{1}{RC} s + \frac{1}{LC}\right) Y(s) = -\left(s^2 + \frac{1}{RC} s + \frac{1}{LC}\right) V_C(s) + \left(s^2 + \frac{1}{RC} s + \frac{1}{LC}\right) V(s)$$
$$= -\frac{1}{LC} V(s) + \left(s^2 + \frac{1}{RC} s + \frac{1}{LC}\right) V(s) = \left(s^2 + \frac{1}{RC} s\right) V(s)$$

y antitransformando queda la ecuación de la salida

$$y'' + \frac{1}{RC} y' + \frac{1}{LC} y = V''(t) + \frac{1}{RC} V'(t)$$

Ejercicio

En el circuito anterior, considere como salida la corriente en la bobina i_L.
a) Usando transformada de Laplace muestre que la ecuación es

$$y'' + \frac{1}{RC} y' + \frac{1}{LC} y = \frac{1}{L} V'(t) + \frac{1}{RCL} V(t)$$

b) Para $R = 1\,\Omega$, $L = 1\,H$, $C = \frac{1}{2} F$, $V(t) = u(t)$ y condiciones iniciales nulas muestre usando transformada de Laplace que la solución es $i_L(t) = (1 - e^{-t} \cos t)\, u(t)$ y compruébela.

Ejemplo 3

En la unidad 1 se estudió un sistema simplificado de amortiguación de un móvil y se obtuvo el sistema

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{b}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & \frac{b}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1}{m_2} & \frac{b}{m_2} & -\frac{k_1 + k_2}{m_2} & -\frac{b}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_2}{m_2} \end{pmatrix} f(t)$$

Si la salida es $y = y_1 = x_1$, transformamos Laplace y despejamos por Cramer $Y_1(s)$ en el sistema

$$\begin{pmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{m_1} & s + \frac{b}{m_1} & -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{b}{m_1} \\ 0 & 0 & s & -1 \\ -\frac{k_1}{m_2} & -\frac{b}{m_2} & \frac{k_1+k_2}{m_2} & s + \frac{b}{m_2} \end{pmatrix} Y(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_2}{m_2} \end{pmatrix} F(s)$$

$$\det(s\,I - A)\, Y_1(s) = \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s + \frac{b}{m_1} & -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{b}{m_1} \\ 0 & 0 & s & -1 \\ \frac{k_2}{m_2} F(s) & -\frac{b}{m_2} & \frac{k_1+k_2}{m_2} & s + \frac{b}{m_2} \end{pmatrix} = \left(\frac{b\, k_2}{m_1\, m_2} s + \frac{k_1\, k_2}{m_1\, m_2} \right) F(s)$$

Además el polinomio característico es

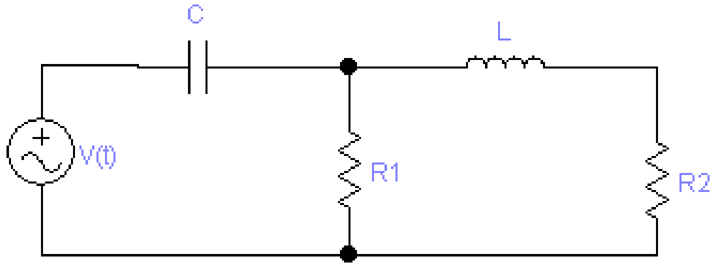
$$\det(s\,I - A) = \det \begin{pmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{m_1} & s + \frac{b}{m_1} & -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{b}{m_1} \\ 0 & 0 & s & -1 \\ -\frac{k_1}{m_2} & -\frac{b}{m_2} & \frac{k_1+k_2}{m_2} & s + \frac{b}{m_2} \end{pmatrix} = s^4 + \left(\frac{b}{m_1} + \frac{b}{m_2} \right) s^3 + \left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_1}{m_2} + \frac{k_2}{m_2} \right) s^2 + \frac{b\, k_2}{m_1\, m_2} s + \frac{k_1\, k_2}{m_1\, m_2}$$

Antitransformando llegamos a la ecuación del movimiento del móvil $x \simeq z_1$ en función de la irregularidad del terreno $f(t)$, que ya fue obtenida en la unidad 1 usando los parámetros de Markov,

$$y^{(4)} + b\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) y^{(3)} + \left(\frac{k_1 + k_2}{m_2} + \frac{k_1}{m_1} \right) y^{(2)} + \frac{b\, k_2}{m_1\, m_2}\, y' + \frac{k_1\, k_2}{m_1\, m_2}\, y = \frac{b\, k_2}{m_1\, m_2}\, f'(t) + \frac{k_1\, k_2}{m_1\, m_2}\, f(t)$$

Ejercicio

En el circuito que sigue, use las variables i_L, v_C, y considere como salida el potencial en la segunda resistencia: $y = R_2\, i_L$.

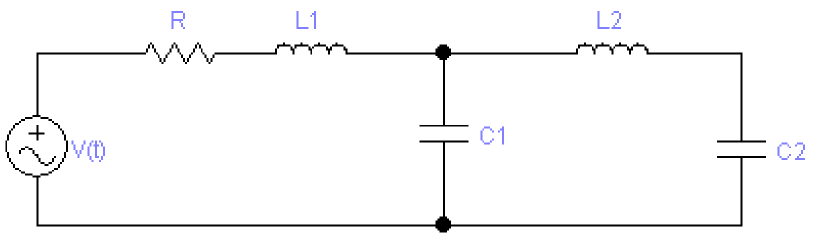


a) Muestre que la ecuación de dicha salida es $y'' + \left(\frac{R_1}{L} + \frac{1}{R_1 C}\right) y' + \left(\frac{1}{L C} + \frac{R_2}{R_1 L C}\right) y = \frac{R_2}{L} V'(t)$

b) Si $R_1 = R_2 = 1\,\Omega$, $L = 1\,H$, $C = 1\,F$, $V(t) = 1$, y las condiciones iniciales nulas, halle la salida.

Ejercicio

En el circuito de la figura, use como variables las corrientes en las bobinas i_1, i_2, y los potenciales en los capacitores v_1, v_2 y considere como salida la corriente en el primer capacitor: $y = i_1 - i_2$.



Muestre que la ecuación de esta salida es

$$y^{(4)} + \frac{R}{L_1} y^{(3)} + \left(\frac{1}{C_1 L_2} + \frac{1}{C_2 L_2} + \frac{1}{C_1 L_1}\right) y^{(2)} + \frac{R}{L_1 L_2}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) y' + \frac{1}{L_1 L_2 C_1 C_2} y =$$

$$\frac{1}{L_1} V^{(3)}(t) + \frac{1}{L_1 L_2 C_2} V'(t)$$

TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE Y PROPIEDADES

1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{a t}$	$\frac{1}{s-a}$
$t\, e^{a t}$	$\frac{1}{(s-a)^2}$
$t^n\, e^{a t}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$\cos b t$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$\operatorname{sen} b t$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$e^{a t} \cos b t$	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2}$
$e^{a t} \operatorname{sen} b t$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
$e(t)$	$\frac{1-e^{-s}}{s}$
$\sqrt{t}$	$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{s^3}}$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$
$\ln t$	$\frac{-\gamma-\ln s}{s}$
$\delta(t)$	1
$\delta'(t)$	s
$\delta^{(n)}(t)$	s^n

$$\mathcal{L}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 F_1 + c_2 F_2$$

$$\mathcal{L}(f') = s F(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\left(f(t)\, e^{\lambda t}\right) = F(s-\lambda)$$

$$\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

$$\lim_{s \to +\infty} F(s) = 0$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = \int_s^{\infty} F(r)\, dr$$

$$\mathcal{L}(f * g) = F(s)\, G(s)$$

$$\mathcal{L}(f(t-a)\, u(t-a)) = e^{-a s} F(s)$$

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right) = \frac{F(s)}{s}$$

$$\lim_{s \to +\infty} s F(s) = f(0)$$

$$\lim_{s \to 0} s F(s) = f(+\infty)$$

$$\mathcal{L}\left(f_p(t)\right) = \frac{1}{1-e^{-p s}} \int_0^p f(t)\, e^{-s t}\, dt$$