

UNIVERSIDAD NACIONAL DE QUILMES
DEPARTAMENTO DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
MATEMÁTICA AVANZADA

UNIDAD 4 ANÁLISIS DE FOURIER

PARTE 1 Funciones periódicas - Series de Fourier

1. Funciones periódicas.
2. Series de Fourier. Cálculo y propiedades.
3. Aplicación a sistemas lineales.
4. Convolución circular. Cálculo y propiedades.
5. Deconvolución circular.

PARTE 2 Transformada de Fourier

1. Motivación.
2. Ejemplos de transformada de Fourier y de la fórmula de inversión.
3. Condiciones para la existencia de transformada de Fourier.
4. Inversión de la transformada de Fourier.
5. Inversión de la transformada de Laplace.
6. Propiedades de la transformada de Fourier.
7. Transformada de Fourier de funciones generalizadas temperadas.
8. Aplicación a sistemas lineales. Filtros.
9. Tren de deltas y su transformada.
10. Muestreo y condición de Nyquist. Teorema del muestreo.
11. Fórmula de síntesis desde la muestra.
12. Aplicación a las ecuaciones del calor, de Laplace y de onda.

FUNCIONES PERIODICAS

Sea $f(t)$ una función seccionalmente continua con período $p > 0$: $f(t + p) = f(t)$.

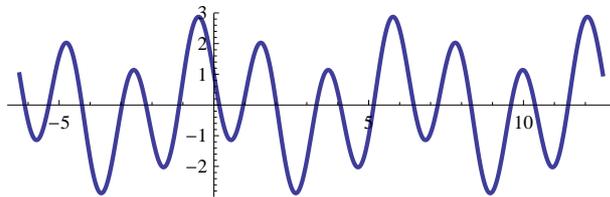
Entonces $f(t + k p) = f(t)$ para cada $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, y por lo tanto los múltiplos positivos de p son también períodos de la función. El modelo que se repite es la función $f(t)$, $0 < t < p$.

Ejemplos $f(t) = \sin 2t$ tiene período π .

$f(t) = \cos t + i \sin t = e^{it}$ es de período 2π , y toma valores complejos.

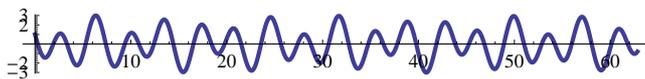
$f(t) = \cos t - 2 \sin 3t$ es de período 2π . Veamos su gráfica.

```
Plot[Cos[t] - 2 Sin[3 t], {t, -2 π, 4 π}, AspectRatio -> Automatic,
PlotStyle -> {Thick}]
```



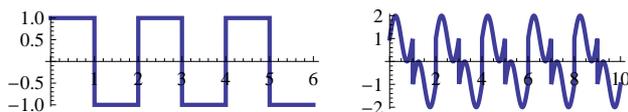
Ejemplo $\cos t$ es de período 2π y $-2 \sin \sqrt{3} t$ de período $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ pero la suma $\cos t - 2 \sin \sqrt{3} t$ no es periódica. Estudie un tramo de su gráfica para comprobar que no hay un modelo que se repita.

```
Plot[Cos[t] - 2 Sin[√3 t], {t, 0, 20 π}, AspectRatio -> Automatic,
PlotStyle -> {Thick}]
```

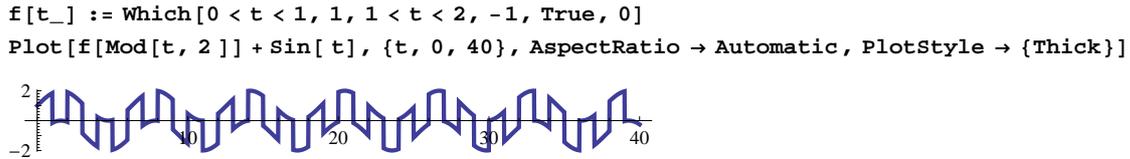


Ejemplo A la función de período 2 y modelo $f_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < 1 \\ -1 & \text{si } 1 < t < 2 \end{cases}$ le sumamos $\sin 2\pi t$, que es de período 1, y obtenemos una función de período 2.

```
f[t_] := Which[0 < t < 1, 1, 1 < t < 2, -1, True, 0]
g1 = Plot[f[Mod[t, 2]], {t, 0, 6}, AspectRatio -> Automatic, PlotStyle -> {Thick}];
g2 = Plot[f[Mod[t, 2]] + Sin[2 π t],
{t, 0, 10}, AspectRatio -> Automatic, PlotStyle -> {Thick}];
GraphicsGrid[{{g1, g2}}]
```



Observando con atención un tramo largo del gráfico de $f_1(t) + \sin t$, no hallamos un modelo que se repita. Trate de probar que no es periódica.



Ejercicio

Sea la función definida en el intervalo $[0, 4]$: $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 < t < 2 \\ 0 & \text{si } 0 < t < 1 \text{ ó } 2 < t < 4 \end{cases}$

- Extenderla a una función par de período 8, y dibujar su gráfico en el intervalo $-12 < t < 12$
- Extenderla a una función impar de período 8, y dibujar su gráfico en el intervalo $-12 < t < 12$

Período mínimo

- Supongamos que $f(t)$ tiene un período mínimo $p_0 > 0$.

Si $p > 0$ es otro período, lo dividimos por p_0 y queda $p = n p_0 + r$ con n natural y $0 \leq r < p_0$. Se tiene

$$f(t) = f(t + p) = f(t + n p_0 + r) = f(t + r)$$

Si fuera $r > 0$, sería un período menor que p_0 lo cual no puede ser. Luego $r = 0$ y p es múltiplo de p_0 .

- Supongamos que $f(t)$ que tiene un período $p > 0$ y tiene límite a derecha finito en 0 : $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0^+)$. Si no tiene período mínimo, demosntremos que es constante. En efecto, se tienen períodos $0 < p_k < p_{k-1}$ con $p_k \rightarrow 0$. Luego para cada $t_0 \neq 0$ y cada p_k escribimos $t_0 = n p_k + r_k$ con n entero y $0 \leq r_k < p_k$:

$$f(t_0) = f(n p_k + r_k) = f(r_k)$$

y como $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = 0$, resulta $f(t_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(r_k) = f(0^+)$ y por lo tanto f es constante.

Ejercicio

- Comprobar que $\sin^2 t$ tiene período mínimo π .
- Comprobar que $\sin 2t - \cos 3t$ tiene período mínimo 2π . Graficar.
- Hallar el período mínimo de $\sin t + 2 \cos \frac{t}{3}$ y graficarla confirmando el período hallado. Rta: 6π

Ejercicio

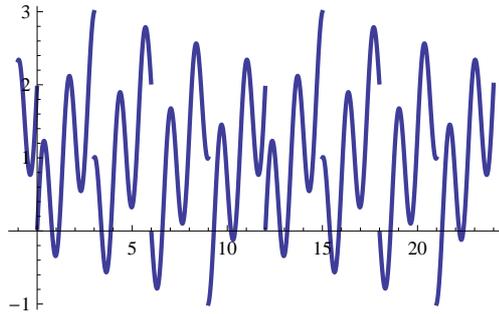
- Sea $f_1(t)$ con período $p_1 > 0$ y $f_2(t)$ con período $p_2 > 0$.

Si el cociente de los períodos es racional, lo expresamos $\frac{p_1}{p_2} = \frac{m}{n}$ en forma irreducible.

Demostrar que $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$ y $f_1(t) f_2(t)$ tienen período $p = p_1 n = p_2 m$.

- La función $\sin \frac{3}{2} \pi t$ es periódica de período mínimo $\frac{4}{3}$ y el serrucho $s\left(\frac{t}{3}\right)$ tiene período mínimo 3. Mostrar que la suma $\sin \frac{3}{2} \pi t + 2 s\left(\frac{t}{3}\right)$ tiene período mínimo 12. Lo visualizamos.

```
Plot[Sin[3/2 π t] + 2 Mod[t/3, 1], {t, -1, 24}, PlotStyle -> {Thick}]
```



Ejercicio

a) Halle el período mínimo de las siguientes funciones. Realice las gráficas para corroborar la respuesta.

$\sin^2 3t + 2 \cos 4t$; b) $\sin \frac{\pi}{2} t - \cos \frac{\pi}{3} t$; c) $\sin \frac{2\pi t}{3} - \cos \frac{5\pi t}{7}$.

b) Observe un tramo largo del gráfico de la función $\sin t + \sin \sqrt{2} t$ y aventure que no es periódica.

¿Puede demostrar que no es periódica?

Ejemplo

Una señal $f(t) > 0$ modula una onda senoidal portadora de alta frecuencia $\sin \omega t$, y el resultado es $f(t) \sin \omega t$.

Si la rectificamos, obtenemos $|f(t) \sin \omega t|$, que lleva la misma información que $f(t) \sin \omega t$, y que, para muchos propósitos, es (casi) la misma que $f(t)$.

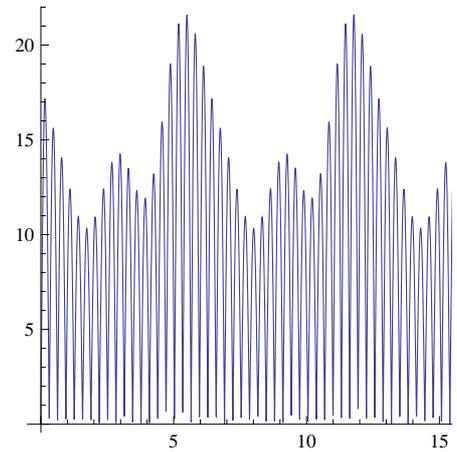
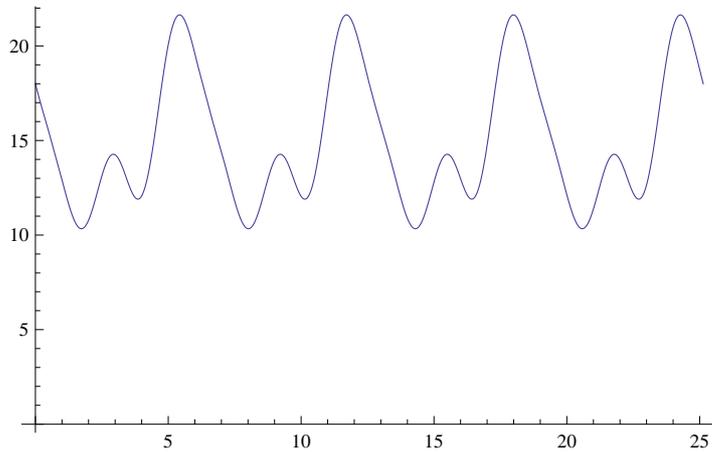
Por ejemplo, los valores de $g(t) = 3(\cos t - \sin t) + (\cos 2t - 2 \sin 2t) + 0.5(\sin 3t - 2 \cos 3t)$ están entre -11 y 11 .

Tomamos $f(t) = g(t) + 12 > 0$ de tal manera que $|f(t) \sin \omega t|$ lleva casi la misma información que $f(t)$.

```

ω = 10;
g1 = Plot[3 (Cos[t] - Sin[t]) + (Cos[2 t] - 2 Sin[2 t]) + 0.5 (Sin[3 t] - 2 Cos[3 t]) + 15,
  {t, 0, 8 π}, AxesOrigin -> {0, 0}];
g2 = Plot[Abs[(3 (Cos[t] - Sin[t]) + (Cos[2 t] - 2 Sin[2 t]) + 0.5 (Sin[3 t] - 2 Cos[3 t]) + 15)
  Sin[ω t]], {t, 0, 8 π}];
GraphicsGrid[
  {{g1,
    g2}}]

```



Espacio de funciones periódicas y series de Fourier

Las funciones seccionalmente continuas de período p forman un espacio vectorial complejo que posee el producto punto o producto escalar

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_0^p x(t) \overline{y(t)} dt$$

La longitud de una función es $\|x\| = \sqrt{\int_0^p |x(t)|^2 dt}$

Las funciones $g_k(t) = e^{\frac{2\pi i k}{p} t}$ tienen período p y son ortogonales entre ellas pues

$$\langle g_k, g_l \rangle = \int_0^p g_k(t) \overline{g_l(t)} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq l \\ p & \text{si } k = l \end{cases}$$

Consideremos el subespacio de dimensión $2n + 1$ generado por las armónicas de frecuencias bajas

$$S_n = \left[e^{\frac{2\pi i k}{p} t} : -n \leq k \leq n \right]$$

La proyección ortogonal de $f(t)$ sobre este subespacio es

$$p_n(f) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{\frac{2\pi k i}{p} t}$$

donde los "coeficientes de Fourier" son

$$c_k = \frac{\langle f, g_k \rangle}{\langle g_k, g_k \rangle} = \frac{1}{p} \int_0^p f(t) e^{-\frac{2\pi k i}{p} t} dt$$

Un resultado fundamental afirma que la distancia entre $f(t)$ y S_n disminuye a cero cuando $n \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(t) - p_n(t)\| = 0$$

es decir, a medida que agregamos frecuencias cada vez más altas, la sumas de Fourier se acercan, en media, más y más a la función. Anotamos esta aproximación así

$$f(t) \simeq \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi k i}{p} t}$$

La serie se llama "serie de Fourier compleja" de la función.

Si $f(t)$ es una función real entonces $c_{-k} = \overline{c_k}$.

Separando la parte real y la parte imaginaria de los coeficientes

$$c_k = \frac{1}{p} \int_0^p f(t) \cos \frac{2\pi k t}{p} dt - i \frac{1}{p} \int_0^p f(t) \sin \frac{2\pi k t}{p} dt = \frac{1}{2} (a_k - i b_k)$$

donde

$$a_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \cos \frac{2\pi k t}{p} dt \quad \text{y} \quad b_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(t) \sin \frac{2\pi k t}{p} dt$$

En particular, $c_0 = \frac{1}{p} \int_0^p f(t) dt = \frac{1}{2} a_0$.

Con esta notación arribamos a la expresión real habitual de la serie de Fourier:

$$\begin{aligned}
 f(t) &\approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi k i}{p} t} = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k e^{\frac{2\pi k i}{p} t} + c_{-k} e^{-\frac{2\pi k i}{p} t} \right) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left(c_k e^{\frac{2\pi k i}{p} t} \right) \\
 &= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2\pi k}{p} t + b_k \operatorname{sen} \frac{2\pi k}{p} t \right)
 \end{aligned}$$

Para el cálculo de los coeficientes, es conveniente tener en cuenta los siguientes resultados.

Lema 1

Sea $g(t)$ seccionalmente continua y de período p .

Entonces $\int_0^p g(t) dt = \int_a^{p+a} g(t) dt$ para cada a .

Demostración

$$\int_0^p g(t) dt = \int_0^a g(t) dt + \int_a^p g(t) dt$$

Haciendo, en la primera integral del segundo miembro, el cambio de variable $s = t + p$, y usando la periodicidad de $g(t)$ se tiene

$$\int_0^a g(t) dt = \int_p^{p+a} g(s-p) ds = \int_p^{p+a} g(s) ds$$

Luego

$$\int_0^p g(t) dt = \int_0^a g(t) dt + \int_a^p g(t) dt = \int_p^{p+a} g(t) dt + \int_a^p g(t) dt = \int_a^{p+a} g(t) dt$$

q.e.d.

Lema 2

Sea $f(t)$ s.c. y de período p .

Si $f(t)$ es real y par entonces $b_k = 0$, y la serie de Fourier se desarrolla en cosenos.

Si $f(t)$ es real e impar entonces $a_k = 0$, y la serie de Fourier se desarrolla en senos.

Demostración

Por el lema anterior, para el cálculo de los coeficientes podemos usar el intervalo $-\frac{p}{2} \leq t \leq \frac{p}{2}$.

Si $f(t)$ es real y par, $b_k = \frac{2}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(t) \operatorname{sen} k t dt = 0$ pues el integrando es impar.

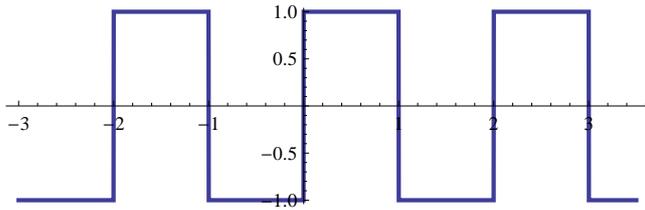
Si $f(t)$ es real e impar, $a_k = \frac{2}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(t) \cos k t dt = 0$ pues el integrando es impar.

q.e.d.

Ejemplo 1.1

Sea $f(t)$ de período 2 y modelo $\begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ -1 & 1 < t < 2 \end{cases}$.

```
f[t_] := Which[0 < t < 1, 1, 1 < t < 2, -1, True, 0]
Plot[f[Mod[t, 2]], {t, -3, 3.5}, AspectRatio -> Automatic, PlotStyle -> {Thick}]
```



La función es impar, por lo tanto $a_k = 0$ y

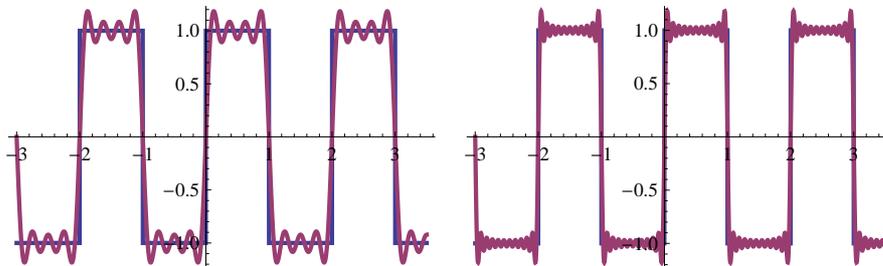
$$b_k = \int_{-1}^1 f(t) \sin \pi k t dt = 2 \int_0^1 \sin \pi k t dt = 2 \frac{1 - \cos \pi k}{\pi k} = \begin{cases} \frac{4}{k} & \text{si } k \text{ impar} \\ 0 & \text{si } k \text{ par} \end{cases}$$

Luego

$$f(t) \approx \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin \pi (2k+1)t}{2k+1}$$

Graficamos, en forma simultánea, la función y algunas sumas parciales.

```
f[t_] := Which[0 < t < 1, 1, 1 < t < 2, -1, True, 0]
g1 = Plot[{f[Mod[t, 2]], 4/π ∑_{k=0}^3 Sin[π(2k+1)t]/(2k+1)}, {t, -3, 3.5}, PlotStyle -> {Thick}];
g2 = Plot[{f[Mod[t, 2]], 4/π ∑_{k=0}^{10} Sin[π(2k+1)t]/(2k+1)}, {t, -3, 3.5}, PlotStyle -> {Thick}];
GraphicsGrid[{{g1, g2}}]
```



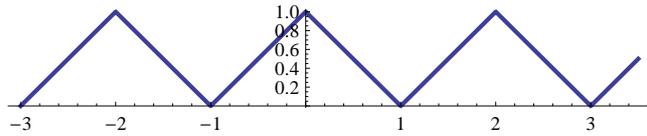
La función $f_p(t)$ de período $p > 0$ y modelo $\begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < p/2 \\ 0 & \text{si } p/2 < t < p \end{cases}$ es igual a $\frac{1}{2} \left(f\left(\frac{2t}{p}\right) + 1 \right)$ y su serie de Fourier es

$$f_p(t) \approx \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin\left(\frac{2\pi(2k+1)t}{p}\right)$$

Ejemplo 1.2

La función "triángulo" de período 2 y modelo $g(t) = 1 - |t|$, $-1 < t < 1$.

```
g[t_] := Which[0 < t < 1, 1 - t, 1 < t < 2, t - 1, True, 0]
Plot[g[Mod[t, 2]], {t, -3, 3.5}, AspectRatio -> Automatic, PlotStyle -> {Thick}]
```



Como la función es par, $b_k = 0$. Además $a_0 = \int_{-1}^1 g(t) dt = 1$ y

$$a_k = \int_{-1}^1 g(t) \cos \pi k t dt = 2 \int_0^1 (1-t) \cos \pi k t dt = \begin{cases} \frac{4}{\pi^2 k^2} & \text{si } k \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } k \text{ es par} \end{cases}$$

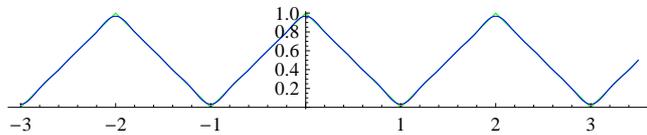
$$\int_0^1 (1-t) \cos[\pi k t] dt$$

$$\frac{1 - \cos[k \pi]}{k^2 \pi^2}$$

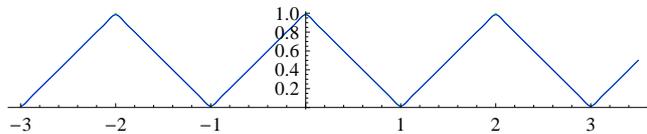
Luego

$$g(t) \approx \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\pi t}{(2k+1)^2}$$

```
n = 2; Plot[{g[Mod[t, 2]], 1/2 + 4/Pi^2 Sum[Cos[(2k+1)Pi t], {k, 0, n}],
{t, -3, 3.5}, PlotStyle -> {RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1]},
AspectRatio -> Automatic, PlotStyle -> {Thick}]
```



```
n = 5; Plot[{g[Mod[t, 2]], 1/2 + 4/Pi^2 Sum[Cos[(2k+1)Pi t], {k, 0, n}],
{t, -3, 3.5}, PlotStyle -> {RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1]},
AspectRatio -> Automatic, PlotStyle -> {Thick}]
```

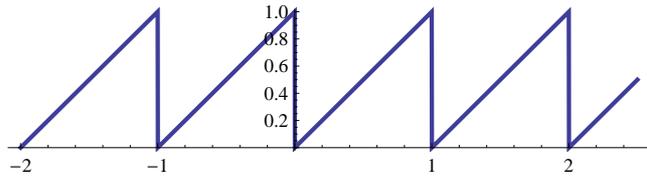


En este ejemplo, a diferencia del anterior, la función es continua y derivable a trozos. Se aprecia que con pocos términos la serie está muy cerca de toda la función.

Ejemplo 1.3

Consideremos la función "serrucho" $s(t)$ de período 1 y modelo t en $0 < t < 1$.

```
s[t_] := Which[0 < t < 1, t, True, 0]
Plot[s[Mod[t, 1]], {t, -2, 2.5}, AspectRatio -> Automatic, PlotStyle -> {Thick}]
```



Esta función no es par ni impar. Pero si la retrasamos y la bajamos obtenemos la función impar:

$$s_1(t) = s\left(t - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$$

con coeficientes de Fourier $a_k = 0$ y

$$b_k = 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} s_1(t) \sin(2\pi k t) dt = 4 \int_0^{\frac{1}{2}} t \sin(2\pi k t) dt = \frac{(-1)^{k+1}}{\pi k}$$

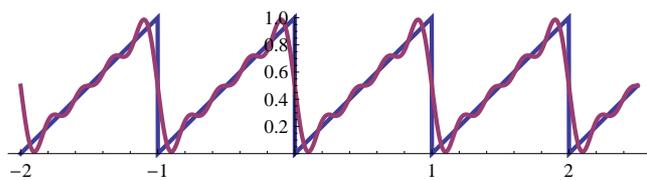
Luego

$$s_1(t) \approx \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(2\pi k t)$$

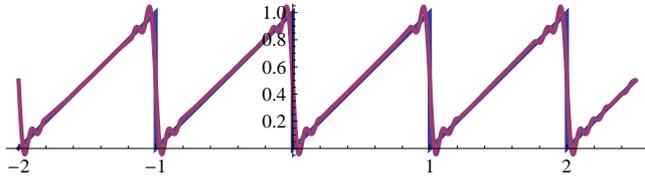
y entonces

$$s(t) = s_1\left(t + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi k t}{k}$$

```
s[t_] := Which[0 < t < 1, t, True, 0]
n = 4;
Plot[{s[Mod[t, 1]], 1/2 - 1/π Sum[Sin[2 π k t], {k, 1, n}]},
{t, -2, 2.5}, AspectRatio -> Automatic, PlotStyle -> {Thick}]
```



```
s[t_] := Which[0 < t < 1, t, True, 0]
n = 10;
Plot[{s[Mod[t, 1]], 1/2 - 1/π ∑k=1n Sin[2 π k t]/k},
{t, -2, 2.5}, AspectRatio → Automatic, PlotStyle → {Thick}]
```



Ejemplo 1.4

Consideremos la función seno rectificada $|\sin t|$ que tiene período π . Como la función es par, $b_k = 0$ y

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |\sin t| \cos 2kt \, dt = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin t \cos 2kt \, dt = \frac{4}{\pi} \frac{1}{1-4k^2}$$

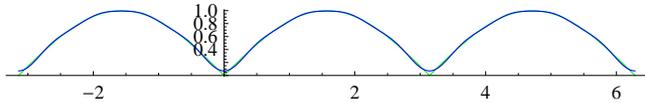
$$\int_0^{\pi/2} \sin[t] \cos[2k t] \, dt$$

$$\frac{1 - 2k \sin[k\pi]}{1 - 4k^2}$$

Luego la serie de Fourier es

$$|\sin t| \approx \frac{2}{\pi} \left(1 - 2 \sum_{k=1}^\infty \frac{\cos 2kt}{4k^2 - 1} \right)$$

```
n = 4;
Plot[{Abs[Sin[t]],  $\frac{2}{\pi} \left( 1 - 2 \sum_{k=1}^n \frac{\text{Cos}[2 k t]}{4 k^2 - 1} \right)$ },
{t, -π, 2π}, PlotStyle -> {RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1]},
AspectRatio -> Automatic, PlotStyle -> {Thick}]
```

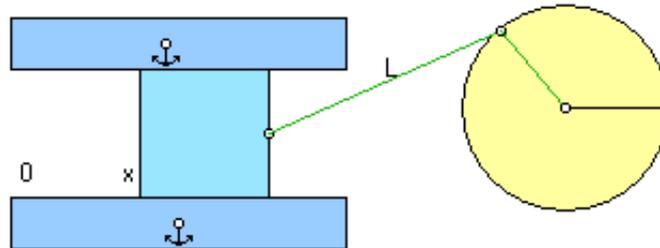


Si la frecuencia de la onda es $\omega = 2\pi f$, es decir, de f Hertz, la serie de Fourier es

$$|\text{sen } \omega t| \approx \frac{2}{\pi} \left(1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k \omega t}{4k^2 - 1} \right)$$

Ejercicio

Una biela de longitud L es accionada por una manivela de radio R , $R < L$, y arrastra a un pistón que se mueve horizontalmente, como muestra la figura.



a) Mostrar que, la posición del pistón en función del ángulo θ de la manivela, es : $x(0) = 2R$, $x(\pi) = 0$.

y $x(\theta) = L + R(1 + \cos \theta) - L \sqrt{1 - \left(\frac{R}{L}\right)^2 \sin^2 \theta}$ Es una función par de período 2π .

b) Desarrollar en serie de Fourier mostrando la relevancia de los primeros armónicos.

Rta. Si $L = 1$, $R = 0.5$

$$x(\theta) \approx 0.565785 + 0.5 \cos \theta - 0.0669441 \text{ Cos}[2. \theta] + 0.00120082 \text{ Cos}[4. \theta] - 0.0000430935 \text{ Cos}[6. \theta]$$

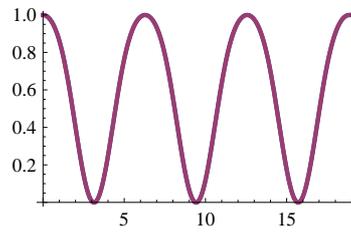
En principio, los armónicos de frecuencia 0, 1 y 2 son los más importantes.

$$\mathbf{a = 0.5; \text{FourierCosSeries} [1.5 + 0.5 \text{ Cos}[\theta] - \sqrt{1 - a^2 \text{ Sin}[\theta]^2}, \theta, 6]}$$

$$0.565785 + 0.5 \text{ Cos}[\theta] - 0.0669441 \text{ Cos}[2 \theta] + 0.00120082 \text{ Cos}[4 \theta] - 0.0000430935 \text{ Cos}[6 \theta]$$

En el gráfico se percibe la casi coincidencia de la función $x(\theta)$ y la suma de los tres primeros términos de la serie de Fourier.

```
a = 0.5; Plot [ { 1 + 0.5 (1 + Cos[θ]) - √(1 - a² Sin[θ]²),
0.5657851 + .5 Cos[θ] - 0.066944 Cos[2. θ] }, {θ, 0, 6 π}, PlotStyle -> {Thick} ]
```



APLICACIÓN A SISTEMAS LINEALES

Teorema 1

Sea $\mathcal{L}(x) = f(t)$ una ecuación lineal con coeficientes constantes e internamente estable.

Si la entrada $f(t)$ es continua y de período p entonces hay una única solución de período p .

Demostración

Sea $\mathcal{L}(x) = a_0 x^{(n)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t)$.

a) Una demostración directa.

Sea $h(t) = \varphi(t) u(t)$ donde $\mathcal{L}(\varphi) = 0$, $\varphi(0) = 0$, ..., $\varphi^{(n-2)}(0) = 0$, $\varphi^{(n-1)}(0) = a_0^{-1}$.

Consideremos la convolución

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) f(t - \tau) d\tau = \int_0^{\infty} \varphi(\tau) f(t - \tau) d\tau$$

Esta convolución converge pues, al ser la ecuación estable, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0$ exponencialmente.

Es claro que tiene período p .

Usando la expresión

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^t f(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau$$

se prueba que es solución de la ecuación $\mathcal{L}(x) = f(t)$ razonando como en la Unidad 2.

b) En esta demostración usaremos desarrollos en series de Fourier.

Este método, a diferencia del anterior, permite entender cómo actúa el sistema sobre la entrada.

Sea $c(\lambda) = a_0 \lambda^n + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$ el polinomio característico.

Por ser internamente estable $c(i\omega) \neq 0$ para cada frecuencia real ω .

Luego a cada entrada armónica $e^{i\omega t}$ le corresponde la salida armónica $\frac{1}{c(i\omega)} e^{i\omega t} = H(i\omega) e^{i\omega t}$.

Naturalmente $H(i\omega) = \frac{1}{c(i\omega)}$ es la función de transferencia. Desarrollamos la entrada en serie de Fourier:

$$f(t) \simeq \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i \frac{2\pi k}{p} t}$$

Por el principio de superposición una solución formal es

$$x(t) \simeq \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k H\left(\frac{2\pi k i}{p}\right) e^{i \frac{2\pi k}{p} t}$$

que es suma de periódicas de período p , y por ello resulta también de período p . Se puede demostrar que si $f(t)$ es continua, con derivada seccionalmente continua, esta serie converge y define una función que satisface la ecuación. Las condiciones sobre f son más exigentes que en a) pues se busca un desarrollo en serie de Fourier de la solución. Ver la Nota 3 abajo.

c) **Unicidad.** Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos soluciones de período p . Entonces $x_0(t) = x_1(t) - x_2(t)$ es solución de la ecuación homogénea y es de período p . Luego $x_0(t) = x_0(t+p) = \dots = x_0(t+kp)$, y como es internamente estable $x_0(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(t+kp) = 0$ y por lo tanto $x_0(t)$ es nula. Luego $x_1(t) = x_2(t)$.

q.e.d.

Nota 1 Salida permanente

Todas las respuestas son suma de la solución periódica más una solución de la ecuación homogénea. Esta última decrece a cero por la estabilidad y por ello se la llama transitoria. La solución periódica, que prevalece cuando el tiempo crece, se llama permanente.

Nota 2 Sistema no estable

Supongamos que la ecuación no es estable debido a que tiene algunas raíces características imaginarias puras. Si la entrada no tiene componentes armónicas con esas raíces, es decir, no hay resonancia, entonces la segunda demostración es también válida y se obtiene la misma conclusión: hay una salida periódica. (Ver ejemplo 2.4). Puede no ser única, como muestra el ejemplo siguiente.

a) En $x'' + x = \cos \frac{1}{2} t$ la entrada tiene período 4π y no provoca resonancia. Hay infinitas salidas de período 4π

$$x(t) = \frac{4}{3} \cos \frac{1}{2} t + c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

b) En $x'' + x = \left| \sin \frac{1}{2} t \right|$ la entrada tiene período 2π y hay resonancia pues la serie de Fourier de la entrada, ver ejemplo 1.4, es

$$\left| \sin \frac{t}{2} \right| \approx \frac{2}{\pi} \left(1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k t}{4 k^2 - 1} \right) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\pi} \cos t + \dots$$

que tiene el término $\cos t$ que es resonante. La ecuación no tiene ninguna salida de período 2π .

c) En $x'' + x = |\sin t|$ la entrada tiene período π y no hay resonancia pues la serie de Fourier de la entrada es

$$|\sin t| \approx \frac{2}{\pi} \left(1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2 k t}{4 k^2 - 1} \right) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{3\pi} \cos 2 t + \frac{4}{15\pi} \cos 4 t \dots$$

que no tiene el término $\cos t$. Luego tiene salida de período π , cuyo desarrollo de Fourier es

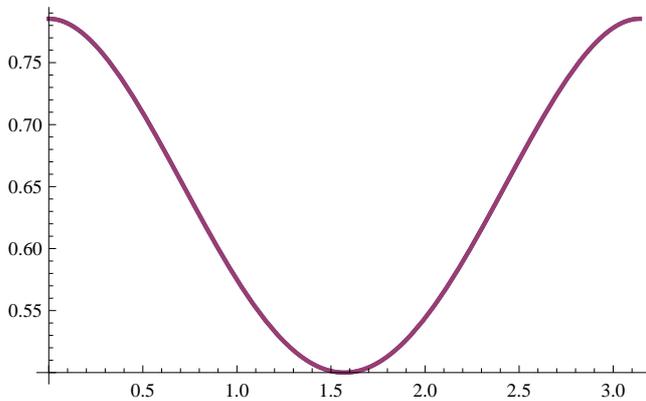
$$x(t) = \frac{2}{\pi} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2 k t}{(4 k^2 - 1)^2} \right)$$

Podemos también buscarla directamente y obtener en un período

$$x(t) = -\frac{t}{2} \cos t + \frac{\pi}{4} \cos t + \frac{1}{2} \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi,$$

y repetirla con período π . Veamos que coinciden gráficamente en un período:

```
Plot [ { - t/2 Cos [ t ] + pi/4 Cos [ t ] + 1/2 Sin [ t ], 2/pi ( 1 + 2 Sum [ Cos [ 2 k t ] / ( 4 k^2 - 1 )^2 ] ) }, { t, 0, pi }, PlotRange -> All, PlotStyle -> { Thick } ]
```



Nota 3 Sobre la convergencia

Observemos que, como los números $H\left(\frac{2\pi k i}{p}\right)$ son del orden k^{-n} , esta serie es más rápida en convergencia que la de $f(t)$, lo que permite prever que la solución es más suave que la entrada.

Más concretamente, si la función $f(t)$ es periódica, continua, y tiene derivada seccionalmente continua, entonces se puede demostrar que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| < \infty$ y por lo tanto la serie de Fourier

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k H\left(\frac{2\pi k i}{p}\right) e^{i \frac{2\pi k}{p} t}$$

es absolutamente convergente.

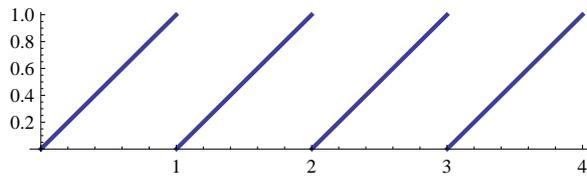
Ello implica que la serie anterior define una función $x(t)$ continua, periódica, que se puede derivar término a término n veces y al reemplazarla en la ecuación la satisface.

Si la función $f(t)$ es sólo seccionalmente continua hay que estudiar más a fondo su serie de Fourier para sacar conclusiones.

Ejemplo 2.1

En un circuito RL de ecuación $Li' + Ri = V(t)$ con $L = 1 H$, $R = 1 \Omega$ introducimos el voltaje "serrucho" de período 1 $V(t) = t$:

```
Plot[Mod[t, 1], {t, 0, 4}, AspectRatio -> Automatic, PlotStyle -> {Thick}]
```



Sabemos que todas las soluciones son continuas.

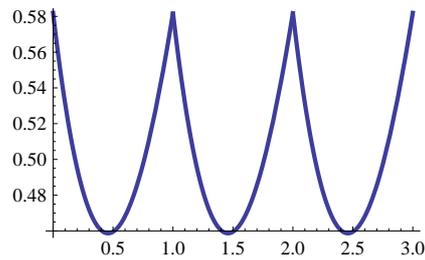
Por el teorema anterior hay una solución periódica. La buscamos directamente.

Las soluciones en $0 \leq t \leq 1$ son de la forma $i(t) = -1 + t + k e^{-t}$.

$$i(0) = i(1) \Rightarrow -1 + k = k e^{-1} \Rightarrow k = \frac{1}{1 - e^{-1}} \approx 1.582$$

La salida permanente es $i(t) = -1 + t + \frac{1}{1 - e^{-1}} e^{-t}$, $0 \leq t \leq 1$, periódica de período 1.

```
f[t_] := -1 + t +  $\frac{1}{1 - e^{-1}}$  e^{-t}
Plot[f[Mod[t, 1]], {t, 0, 3}, PlotStyle -> {Thick}]
```

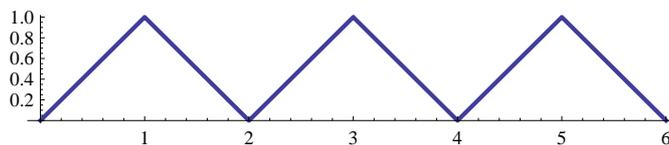


Ejemplo 2.2

En el mismo circuito RL de ecuación $Li' + Ri = V(t)$ con $L = 1 H$, $R = 1 \Omega$ introducimos como

voltaje pulso "triangular" continuo de período 2: $V(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 2 - t & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$.

```
g[t_] := If[0 < t < 1, t, 2 - t]
Plot[g[Mod[t, 2]], {t, 0, 6}, AspectRatio -> Automatic, PlotStyle -> {Thick}]
```



Las soluciones en $0 \leq t \leq 1$ son de la forma $i_1(t) = -1 + t + a e^{-t}$

y en $1 \leq t \leq 2$ son de la forma $i_2(t) = 3 - t + b e^{-t}$

Como la entrada es continua todas las salidas tienen derivada continua. Además por el teorema anterior, hay una solución periódica del mismo período. La buscamos; debe cumplir

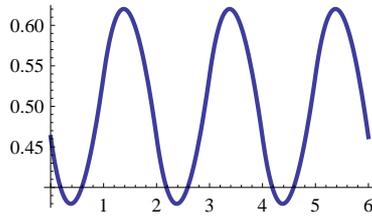
$$\begin{aligned} i_1(1) = i_2(1) &\Rightarrow a e^{-1} = 2 + b e^{-1} \\ i_1(0) = i_2(2) &\Rightarrow -1 + a = 1 + b e^{-2} \end{aligned}$$

Resolviendo obtenemos $a = \frac{2e}{1+e}$, $b = -\frac{2e^2}{1+e}$. Con estas constantes la solución permanente es

$$i(t) = \begin{cases} -1 + t + \frac{2e}{1+e} e^{-t} & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 3 - t - \frac{2e^2}{1+e} e^{-t} & \text{si } 1 \leq t \leq 2 \end{cases} \quad \text{periódica de período 2}$$

y se comprueba que tiene derivada continua. En el gráfico que sigue podemos apreciar estas cualidades.

```
p[t_] := Which[0 < t < 1, -1 + t +  $\frac{2 e}{1 + e} e^{-t}$ , 1 < t < 2, 3 - t -  $\frac{2 e^2}{1 + e} e^{-t}$ , True, 0]
Plot[p[Mod[t, 2]], {t, 0, 6}, PlotStyle -> {Thick}]
```



Método de Laplace

Utilizando la transformada de Laplace, se pueden hallar las condiciones iniciales que satisface la solución periódica, y a partir de ellas podemos hallar la solución periódica.

Por ejemplo, transformando Laplace una ecuación estable de orden 2 : $a_0 x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t)$, con $f(t)$ de período p , obtenemos

$$a_0 [s^2 X(s) - s x(0) - x'(0)] + a_1 [s X(s) - x(0)] + a_2 X(s) = \frac{1}{1 - e^{-sp}} G(s)$$

con $G(s) = \int_0^p f(t) e^{-st} dt$, que es analítica en todo el plano complejo s . Despejando queda

$$X(s) = \frac{1}{1 - e^{-sp}} \frac{[(a_0 s + a_1)x(0) + a_0 x'(0)] (1 - e^{-sp}) + G(s)}{a_0 s^2 + a_1 s + a_2} = \frac{1}{1 - e^{-sp}} G_1(s)$$

Para que $X(s)$ sea la solución periódica prevista por el Teorema 1, $G_1(s)$ deber ser analítica en todo el plano, y para ello su numerador se debe anular en las dos raíces del denominador, que son las raíces características. De ahí obtenemos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas $x(0)$, $x'(0)$, que tiene solución única, que son las condiciones iniciales de la salida de período p .

En el ejemplo que sigue se ilustra este procedimiento.

Ejemplo 2.3

En un circuito RL de ecuación $Li' + Ri = V(t)$ con $L = 1 H$, $R = 2 \Omega$ introducimos el voltaje de período 2 : $V(t) = 1 \text{ Volt}$ si $0 < t < 1$, $V(t) = 0 \text{ Volt}$ si $1 < t < 2$.

Utilizaremos tres métodos para encontrar la salida periódica.

Método 1

Utilizamos el desarrollo de Fourier, como en la demostración del teorema.

Los coeficientes de Fourier de la entrada son

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) e^{-\frac{2\pi i k}{T} t} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-i\pi k t} dt = \frac{1}{2\pi i} \frac{(1 - (-1)^k)}{k} \text{ si } k \neq 0 \text{ y } c_0 = \frac{1}{2}$$

y el desarrollo de Fourier es

$$v(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k \neq 0, k=-\infty}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^k)}{k} e^{i\pi k t}$$

Como $H(i\omega) = \frac{1}{2+i\omega}$, la respuesta periódica es

$$i(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k \neq 0, k=-\infty}^{\infty} \frac{(1-(-1)^k)}{k(2+i\pi k)} e^{i\pi k t}$$

Para graficar con la computadora esta función ver el ejercicio 2.5 abajo.

De la serie anterior obtenemos la condición inicial que satisface la solución periódica:

$$i(0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k \neq 0, k=-\infty}^{\infty} \frac{[1-(-1)^k]}{k(2+i\pi k)} = \frac{1}{4} - 2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{4 + \pi^2(2j+1)^2} \approx 0.0601 \dots$$

$$\frac{1}{4} - 2 \sum_{j=0}^{1000} \frac{1}{4 + \pi^2 (2j+1)^2} // \mathbf{N}$$

0.0596521

Método 2

Construimos la solución como en el ejemplo 2.1 :
$$\begin{cases} i_1(t) = \frac{1}{2} + a e^{-2t} & \text{si } 0 < t < 1 \\ i_2(t) = b e^{-2t} & \text{si } 1 < t < 2 \end{cases}$$

Por continuidad de la solución debe ser $i_1(1) = i_2(1)$, y por periodicidad $i_1(0) = i_2(2)$

Resolviendo el sistema se obtiene $a = -\frac{1}{2} \frac{1}{1+e^{-2}}$ y $b = \frac{1}{2} \frac{e^2}{1+e^{-2}}$.

En particular la condición inicial es

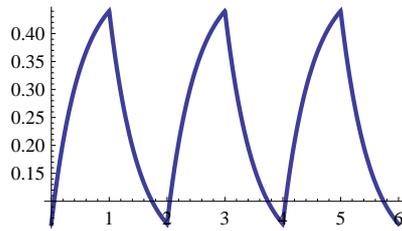
$$i_1(0) = \frac{1}{2} + a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{1+e^{-2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+e^2} \approx 0.0596015$$

En particular obtenemos la igualdad

$$\frac{1}{4} - 2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{4 + \pi^2(2j+1)^2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+e^2}.$$

Graficamos la solución.

```
f[t_] := Which[0 < t < 1,  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{1 + e^{-2}}$  e-2t, 1 < t < 2,  $\frac{1}{2} \frac{e^2}{1 + e^{-2}}$  e-2t, True, 0]
Plot[f[Mod[t, 2]], {t, 0, 6}, PlotStyle -> {Thick}]
```



Método 3

Usando la transformada de Laplace determinamos la condición inicial de la solución periódica.

$$\mathcal{L}(v(t))(s) = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \frac{1 - e^{-s}}{s}$$

Transformando $i' + 2i = v(t)$ obtenemos $sI(s) - i(0) + 2I(s) = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \frac{1 - e^{-s}}{s}$ y despejando

$$I(s) = \frac{1}{1 - e^{-2s}} \frac{i(0)s(1 - e^{-2s}) + 1 - e^{-s}}{s(s+2)} = \frac{1}{1 - e^{-2s}} g(s)$$

Para que sea la transformada de una periódica la función $g(s)$ no debe tener polos. Para ello el numerador de $g(s)$ se debe anular en $s = -2$. Luego queda la condición inicial que verifica la solución periódica

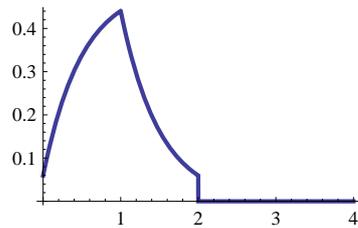
$$i(0)(-2)(1 - e^4) + 1 - e^2 = 0 \quad \text{de donde} \quad i(0) = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + e^2}$$

en coincidencia con resultado obtenido con el método anterior. Utilizando este valor inicial y antitransformando $g(s)$ obtenemos el modelo de la solución:

$$\text{sol} = \text{InverseLaplaceTransform}\left[\frac{i(0)s(1 - e^{-2s}) + 1 - e^{-s}}{s(s+2)}, s, t\right]$$

$$\frac{1}{2} e^{-2t} \left(-1 + e^{2t} + (e^2 - e^{2t}) \text{HeavisideTheta}[-1 + t] + 2i[0] - 2e^4 \text{HeavisideTheta}[-2 + t] \right) i[0]$$

```
i[0] =  $\frac{1}{2} \frac{1}{1 + e^2}$ ; Plot[sol, {t, 0, 4}, PlotStyle -> {Thick}]
```



Ejemplo 2.4

Un circuito en serie LC verifica la ecuación inestable $LC v_C'' + v_C = v(t)$

Es inestable y por lo tanto, en general no vale el teorema 1. Para $L = 1 H$, $C = \frac{1}{4} F$ las raíces características son $\pm 2i$ y las soluciones de la homogénea son $c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t$ que tienen período π .

a) El voltaje de entrada

$$v(t) = |\operatorname{sen} t| \approx \frac{2}{\pi} \left(1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kt}{4k^2 - 1} \right)$$

tiene período π y posee la componente armónica $-\frac{4}{\pi} \frac{\cos 2t}{3}$ que es resonante para el sistema.

Probar que no hay salida periódica.

b) El voltaje

$$v(t) = |\operatorname{sen} 4t| \approx \frac{2}{\pi} \left(1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 8kt}{4k^2 - 1} \right)$$

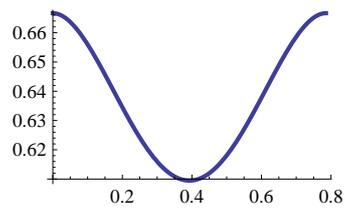
tiene período $\frac{\pi}{4}$ y no tiene componentes armónicas resonantes.

Probar que

$$v_C(t) = -\frac{1}{3} \operatorname{sen} 4t + \frac{2}{3} \cos 2t + \frac{2}{3} \operatorname{sen} 2t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$$

extendida con período $\frac{\pi}{4}$ da la única solución permanente.

```
Plot[-1/3 Sin[4 t] + 2/3 Cos[2 t] + 2/3 Sin[2 t], {t, 0, Pi/4}, PlotStyle -> {Thick}]
```



Bien entendido, la solución periódica está dada por el modelo $v_C(t) = -\frac{1}{3} \sin 4t + \frac{2}{3} \cos 2t + \frac{2}{3} \sin 2t$ en el intervalo $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ y se repite periódicamente con período $\frac{\pi}{4}$. Su desarrollo de Fourier es el siguiente.

A la entrada $\cos \omega t$ responde con $\frac{4 \cos \omega t}{4 - \omega^2}$, luego a la entrada

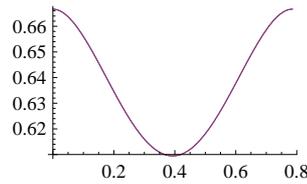
$$v(t) = \sin 4t \approx \frac{2}{\pi} \left(1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 8kt}{4k^2 - 1} \right)$$

responde con

$$v_C(t) \approx \frac{2}{\pi} \left(1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{4 - 64k^2} \frac{\cos 8kt}{4k^2 - 1} \right)$$

Graficamos el modelo y la décima suma parcial del desarrollo anterior y vemos que prácticamente coinciden.

$$\text{Plot} \left[\left\{ -\frac{1}{3} \sin[4t] + \frac{2}{3} \cos[2t] + \frac{2}{3} \sin[2t], \frac{2}{\pi} \left(1 - 2 \sum_{k=1}^{10} \frac{4}{4 - 64k^2} \frac{\cos[8kt]}{4k^2 - 1} \right) \right\}, \{t, 0, \frac{\pi}{4}\} \right]$$



Ejercicio

Considere un circuito en serie LC con $L = 1 H$, $C = 1 F$: $v_C'' + v_C = v(t)$.

a) La entrada $v(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq \pi \\ -1 & \text{si } \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$ de período 2π es resonante y no hay salida periódica.

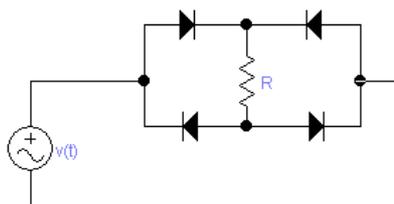
Probarlo usando el desarrollo de Fourier.

b) La entrada $v(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi \end{cases}$ de período π (aumentamos la frecuencia) no es resonante

y hay salida periódica. Hallarla con el desarrollo de Fourier y también directamente.

Voltaje alterno a voltaje constante

Sea el voltaje alterno $V(t) = 220 \sqrt{2} \sin \omega t$, con $\omega = 2\pi 50 = 100\pi$, es decir, 50 Hertz. Para obtener un voltaje constante, o "voltaje continuo", primero se rectifica la onda mediante semiconductores, obteniendo de esa manera el voltaje $220 \sqrt{2} |\sin \omega t|$ y luego se filtran las frecuencias no nulas. Para rectificar la corriente usamos, por ejemplo, el esquema de la figura con 4 semiconductores.



La corriente en la resistencia siempre va de arriba hacia abajo, cualquiera sea la polaridad de la fuente.

Por ello la caída de potencial en la resistencia es de la forma $220\sqrt{2} |\text{sen } \omega t|$.

Usamos el desarrollo de Fourier

$$v(t) = 220\sqrt{2} |\text{sen } \omega t| \approx 220 \frac{2\sqrt{2}}{\pi} - 220 \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi 100 k t)}{4k^2 - 1} \approx 198.07 - 396.14 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(100\pi k t)}{4k^2 - 1}$$

Si filtramos este voltaje para eliminar las frecuencias no nulas, nos quedará el voltaje constante 198.07. Podemos usar un filtro pasa bajo. Por ejemplo, un circuito en serie LC con el voltaje $V(t)$ de entrada, y como salida la caída de potencial v en el capacitor. La ecuación es

$$LC v'' + v = V(t)$$

Un voltaje constante no se ve afectado por la bobina.

El voltaje armónico $e^{i\alpha t}$, $\alpha \neq 0$, tiene por salida permanente $H(i\alpha) e^{i\alpha t} = \frac{1}{1 - LC\alpha^2} e^{i\alpha t}$

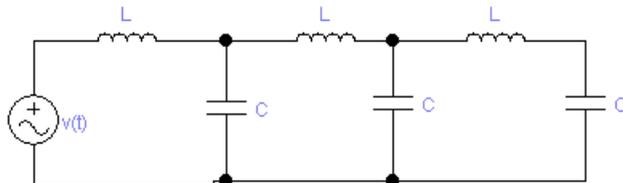
Tomando parte real, la salida para la entrada $\cos \alpha t$ es $\frac{1}{1 - LC\alpha^2} \cos \alpha t$.

Si elegimos $LC = 1$ se tiene $\frac{1}{1 - LC\omega^2 k^2} \approx -0.00001 \dots$ y la salida es cercana a una constante

$$198.07 - 396.14 \left(-\frac{1}{3} 0.00001 \cos 100\pi t + \dots \right) \approx 198.07 + 0.001 \cos 100\pi t + \dots \approx 198$$

Observemos que si bien el circuito es inestable con frecuencia natural $\omega_0 = (LC)^{-\frac{1}{2}}$, aquí estamos usando frecuencias mucho mayores en las entradas, y ellas no provocan resonancia.

Un filtro mucho mejor es el formado con tres circuitos LC conectados en escalera, como se indica en el esquema siguiente.



La ecuación que verifica el potencial en el capacitor de la derecha es

$$v^{(6)} + \frac{5}{LC} v^{(4)} + \frac{6}{(LC)^2} v^{(2)} + \frac{1}{(LC)^3} v = \frac{1}{(LC)^3} V(t)$$

Si $LC = 1$, la salida permanente para el armónico $V(t) = e^{i\omega t}$ es

$$v(t) = H(i\omega) e^{i\omega t} = \frac{1}{-\alpha^6 + 5\alpha^4 - 6\alpha^2 + 1} e^{i\omega t}.$$

Tomando la parte real, la salida para la entrada $V(t) = \cos \alpha t$ es

$$v(t) = \frac{1}{-\alpha^6 + 5\alpha^4 - 6\alpha^2 + 1} \cos \omega t.$$

Luego, para el primer armónico de la entrada rectificada $-\frac{396.14}{3} \cos 100\pi t$, la salida es

$$-\frac{396.14}{3(- (100\pi)^6 + 5(100\pi)^4 - 6(100\pi)^2 + 1)} \cos 100\pi t \simeq -1.37 \times 10^{-13} \cos 100\pi t$$

que es prácticamente nula.

Ejemplo 2.5

Introducimos el voltaje "onda cuadrada" en un circuito RL de ecuación $Li' + Ri = v(t)$, con $L = 1 H$, $R = 1 \Omega$. La serie de Fourier de la entrada es

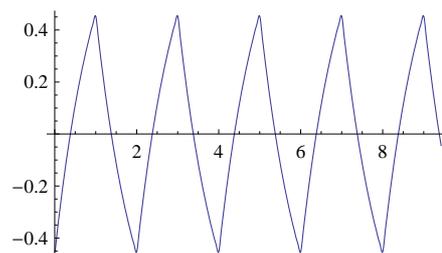
$$v(t) \simeq \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\text{sen} \pi(2k+1)t}{2k+1}$$

La transferencia es $\frac{1}{1+i\omega}$ y la entrada $\text{sen} \omega t = \text{Im} e^{i\omega t}$ tiene salida $\text{Im} \left(\frac{e^{i\omega t}}{1+i\omega} \right) = \frac{\text{sen} \omega t - \omega \cos \omega t}{1+\omega^2}$

Luego la salida permanente a la onda cuadrada $v(t)$ es

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\text{sen} \pi(2k+1)t - \pi(2k+1) \cos \pi(2k+1)t}{(2k+1)(1+\pi^2(2k+1)^2)}$$

$$n = 10; \text{Plot} \left[\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^n \frac{\text{Sin}[\pi(2k+1)t] - \pi(2k+1) \text{Cos}[\pi(2k+1)t]}{(2k+1)(1+\pi^2(2k+1)^2)}, \{t, 0, 3\pi\}, \text{PlotPoints} \rightarrow 100 \right]$$



Se aprecia que, si bien la entrada es discontinua, la salida es continua.

Buscamos la salida periódica en forma directa en un período:

$$v_1(t) = 1 + a e^{-t}, \quad 0 < t < 1$$

$$v_2(t) = -1 + b e^{-t}, \quad 1 < t < 2$$

$$v_1(0) = v_2(2), \quad v_1(1) = v_2(1)$$

```

v1[t_] := 1 + a e-t
v2[t_] := -1 + b e-t
Solve[{v1[0] == v2[2], v1[1] == v2[1]}, {a, b}]

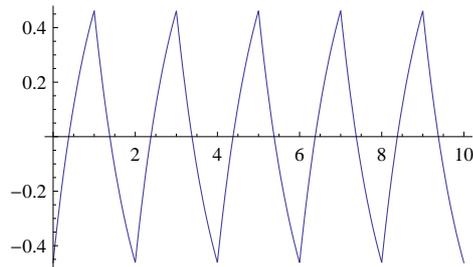
```

$$\left\{ \left\{ a \rightarrow -\frac{2e}{1+e}, b \rightarrow \frac{2e^2}{1+e} \right\} \right\}$$

```

v1[t_] := 1 - \frac{2e}{1+e} e^{-t}
v2[t_] := -1 + \frac{2e^2}{1+e} e^{-t}
v[t_] := If[0 < t < 1, v1[t], v2[t]]
Plot[v[Mod[t, 2]], {t, 0, 10}]

```



Ejemplo 2.6

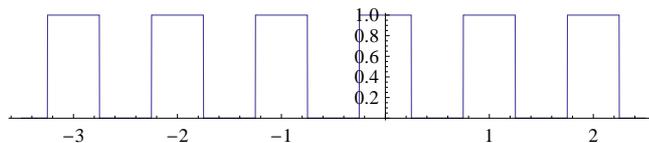
En un circuito en serie RLC se introduce un voltaje en forma de pulso de período 1 seg

$$v(t) = \begin{cases} 1 \text{ V} & \text{si } -\frac{1}{4} < t < \frac{1}{4} \\ 0 \text{ V} & \text{si } \frac{1}{4} < t < \frac{1}{2} \end{cases}$$

```

v[t_] := Which[0 < t < \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{4} < t < \frac{1}{2}, 0, True, 0]
g1 = Plot[v[Mod[t, 1]], {t, -3.5, 2.5}, AspectRatio -> Automatic]

```



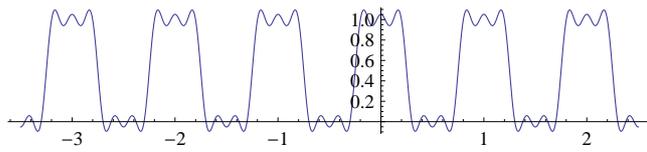
Calculamos los primeros términos de la serie de Fourier de $f(t)$ mediante el programa *Mathematica*.

```

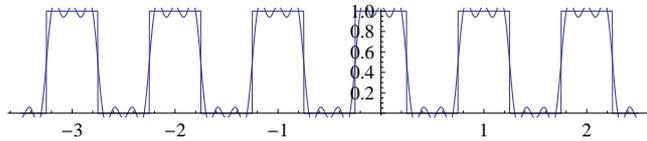
u[t_] := If[-\frac{1}{4} < t < \frac{1}{4}, 1, 0]
s = FourierTrigSeries[u[t], t, 5]
\frac{1}{2} + \frac{2 \text{Cos}[2 \pi t]}{\pi} - \frac{2 \text{Cos}[6 \pi t]}{3 \pi} + \frac{2 \text{Cos}[10 \pi t]}{5 \pi}

```

```
g2 = Plot[s, {t, -3.5, 2.5}, AspectRatio -> Automatic]
```



```
Show[g1, g2]
```



Para $L = 1 H$, $R = 2 \Omega$, $C = \frac{1}{3} F$ se tiene la ecuación de la caída de potencial en el capacitor $v_C(t)$

$$\frac{1}{3} v_C'' + \frac{2}{3} v_C' + v_C = v(t)$$

La función de transferencia es $H(i\omega) = \left(-\frac{1}{3} \omega^2 + \frac{2}{3} i \omega + 1\right)^{-1}$.

a) Método de Fourier

Hallamos una aproximante de la respuesta permanente mediante las fórmulas provistas por el teorema anterior

si $v(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega_0 k t}$ entonces $v_C(t) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k H(i\omega k) e^{i\omega k t}$

Ahora usamos el paquete especial `Algebra`ReIm`` que reconoce parte real y parte imaginaria en números y ponemos $t /: \text{Im}[t] = 0$ para significar que el número t es real.

```
<< Algebra`ReIm`
```

$$H[z_] := \frac{1}{\frac{1}{3} z^2 + \frac{2}{3} z + 1}$$

```
t /: Im[t] = 0;
```

$$w = \frac{1}{2} + \text{Re} \left[\frac{2}{\pi} \left(H[2\pi i] e^{2\pi i t} + H[-2\pi i] e^{-2\pi i t} \right) - \frac{2}{3\pi} \left(H[6\pi i] e^{6\pi i t} + H[-6\pi i] e^{-6\pi i t} \right) + \frac{2}{5\pi} \left(H[10\pi i] e^{10\pi i t} + H[-10\pi i] e^{-10\pi i t} \right) \right] // N // Expand // Chop$$

$$0.5 - 0.0936036 \text{Cos}[6.28319 t] + 0.0035731 \text{Cos}[18.8496 t] - 0.000773244 \text{Cos}[31.4159 t] + 0.0322453 \text{Sin}[6.28319 t] - 0.000382347 \text{Sin}[18.8496 t] + 0.0000493763 \text{Sin}[31.4159 t]$$

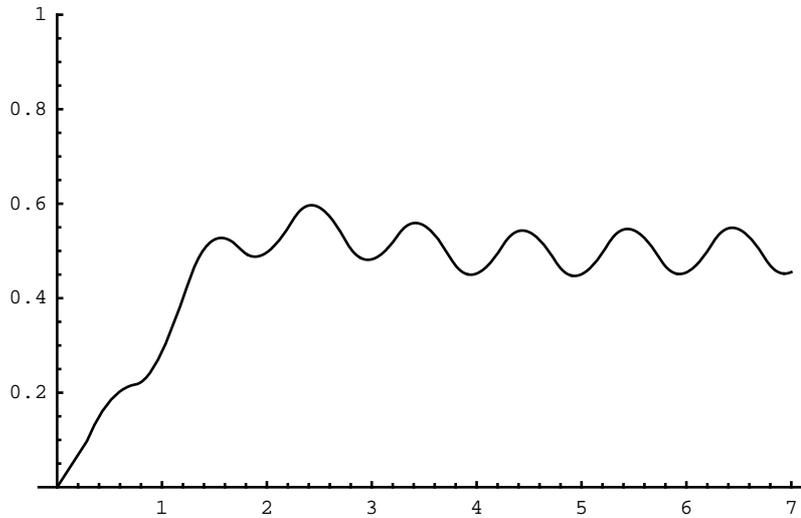
Graficamos esta función, que es una aproximación de la respuesta permanente.

```
Plot[w, {t, 0, 7}, PlotRange -> {0, 1}];
```

- b) Resolvemos numéricamente la ecuación con condiciones inicial nulas y comparamos con la anterior a largo plazo. Al principio las condiciones iniciales perturban la respuesta permanente la cual paulatinamente se va destacando.

```
Clear[x, t];
v1[t_] := Which[0 < t <  $\frac{1}{4}$ , 1,  $\frac{3}{4}$  < t < 1, 1, True, 0]
v[t_] := v1[Mod[t, 1]]
s = NDSolve[ $\left\{\frac{1}{3} x''[t] + \frac{2}{3} x'[t] + x[t] = v[t], x[0] = 0, x'[0] = 0\right\}$ , x, {t, 0, 10}]
{x -> InterpolatingFunction[{{0., 10.}}, <>]}
```

```
Plot[Evaluate[x[t] /. s], {t, 0, 7}, PlotRange -> {0, 1}];
```



c) Buscamos una fórmula para la solución periódica de $\frac{1}{3} v_C'' + \frac{2}{3} v_C' + v_C = v(t)$

Por razones técnicas retrasamos la entrada en $\frac{1}{4}$ lo cual atrasa la salida también en $\frac{1}{4}$.

Para $0 < t < \frac{1}{2}$ la solución es de la forma $v_1(t) = 1 + a_1 e^{-t} \cos \sqrt{2} t + b_1 e^{-t} \sin \sqrt{2} t$

y para $\frac{1}{2} < t < 1$ la solución es de la forma $v_2(t) = a_2 e^{-t} \cos \sqrt{2} t + b_2 e^{-t} \sin \sqrt{2} t$

```
Clear[a1, b1, a2, b2];
```

```
v1[t_] := 1 + a1 e^{-t} Cos[\sqrt{2} t] + b1 e^{-t} Sin[\sqrt{2} t]
```

```
v2[t_] := a2 e^{-t} Cos[\sqrt{2} t] + b2 e^{-t} Sin[\sqrt{2} t]
```

```
NSolve[
```

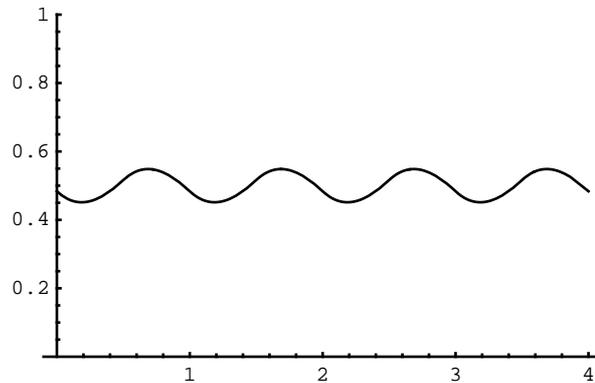
```
{v1[0] == v2[1], v1'[0] == v2'[1], v1[\frac{1}{2}] == v2[\frac{1}{2}], v1'[\frac{1}{2}] == v2'[\frac{1}{2}]}, {a1, b1, a2, b2}]
```

```
{a1 -> -0.51635, b1 -> -0.623198, a2 -> -0.0202794, b2 -> 1.33418}
```

```

Clear[w1, w2, w, t];
w1[t_] := 1 - 0.51635 e-t Cos[√2 t] - 0.62319 e-t Sin[√2 t]
w2[t_] := -0.02028 e-t Cos[√2 t] + 1.3342 e-t Sin[√2 t]
w[t_] := If[0 < t <  $\frac{1}{2}$ , w1[t], w2[t]]
Plot[w[Mod[t, 1]], {t, 0, 4}, PlotRange → {0, 1}];

```



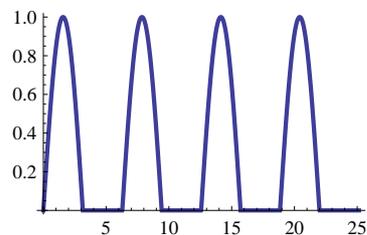
Ejercicio

Hallar el desarrollo de Fourier de la semiondas senoidales: $v(t) = \frac{1}{2} (\sin t + |\sin t|)$

```

g = Plot[ $\frac{1}{2} (\text{Sin}[t] + \text{Abs}[\text{Sin}[t]])$ , {t, 0, 8 π}, PlotStyle → {Thick}]

```



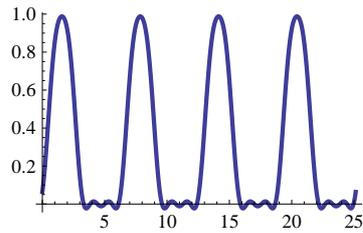
```

w = FourierTrigSeries[ $\frac{1}{2} (\text{Sin}[t] + \text{Abs}[\text{Sin}[t]])$ , t, 5]

```

$$\frac{1}{\pi} - \frac{2 \cos[2 t]}{3 \pi} - \frac{2 \cos[4 t]}{15 \pi} + \frac{\sin[t]}{2}$$

```
Plot[w, {t, 0, 8 π}, PlotStyle -> {Thick}]
```



Ejercicio

Desarrollar en serie de Fourier los polinomios trigonométricos $p_1(t) = \sin^3 t \cos t$ y $p_2(t) = \sin^2 t \cdot \cos^4 t$ y graficar.

Sugerencia: usar la identidad de Euler $e^{it} = \cos t + i \sin t$ para expresar los polinomios trigonométricos en términos de $\sin nt$ y $\cos nt$.

Ejercicio

Si la entrada a una ecuación estable es una senoide real de frecuencia ω : $f(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t$ mostrar que la salida estacionaria es una senoide real de la misma frecuencia.

Aplicación: destacar una frecuencia.

Sea $\omega_0 > 0$ una frecuencia que nos interesa destacar en las funciones periódicas $f(t)$.

Elegimos un número $\epsilon > 0$ pequeño. La función

$$c(z) = (z + \epsilon + i\omega_0)(z + \epsilon - i\omega_0) = (z + \epsilon)^2 + \omega_0^2$$

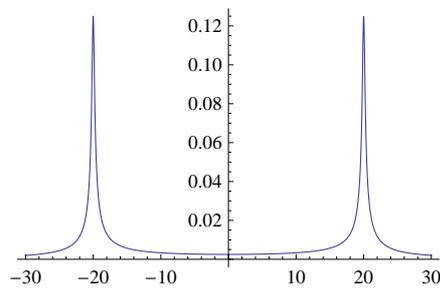
es un polinomio estable y es la función característica de un circuito en serie RLC en el cual

$$L = 1 \text{ H} \quad R = 2\epsilon \text{ } \Omega \quad \text{y} \quad C = (\epsilon^2 + \omega_0^2)^{-1}$$

Su función de transferencia $H(z) = \frac{1}{c(z)}$ tiene sus dos polos cerca de $\pm \omega_0$, y por lo tanto destaca las frecuencias cercanas a esas y va reduciendo cada vez más a las que están lejos de ellas. Aquí no tenemos en cuenta el cambio de fase en cada armónico.

Por ejemplo, para $\omega_0 = 20$, $\epsilon = 0.2$, graficamos $|H(i\omega)| = \left| \frac{1}{(i\omega + 0.2)^2 + 20^2} \right|$.

```
Plot[Abs[ $\frac{1}{(i \omega + 0.2)^2 + 20^2}$ ], { $\omega$ , -30, 30}, PlotRange -> All]
```



Ejercicio

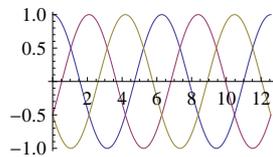
Filtrar con este circuito la función pulso $v(t)$ del ejemplo anterior y graficar el resultado.

Voltaje trifásico

Son tres voltajes armónicos desfasados en 120° :

$$\cos t, \quad \cos\left(t - \frac{2\pi}{3}\right), \quad \cos\left(t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

```
Plot[{Cos[t], Cos[t -  $\frac{2\pi}{3}$ ], Cos[t -  $\frac{4\pi}{3}$ ]}, {t, 0, 4\pi}]
```



a) La suma de los tres es cero.

En efecto, sea $\omega = e^{\frac{2}{3}\pi i} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ raíz cúbica de la unidad; es claro que $1 + \omega + \omega^2 = 0$ y

$$\cos t = \operatorname{Re}(e^{it}), \quad \cos\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{Re}(\omega^2 e^{it}), \quad \cos\left(t - \frac{4\pi}{3}\right) = \operatorname{Re}(\omega e^{it})$$

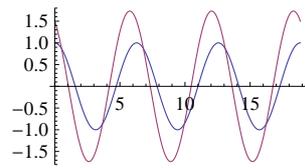
$$\text{Luego } \cos t + \cos\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(t - \frac{4\pi}{3}\right) = \operatorname{Re}[e^{it}(1 + \omega^2 + \omega)] = 0$$

b) La resta de los dos primeros es

$$\begin{aligned} \cos t - \cos\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) &= \cos t - \cos t \cos \frac{2\pi}{3} - \sin t \sin \frac{2\pi}{3} \\ &= \frac{3}{2} \cos t - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t = \sqrt{3} \cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

Es un adelanto de la onda coseno en $\frac{\pi}{6} \equiv 30^\circ$ y una amplificación de la amplitud en $\sqrt{3}$.

Plot $\left[\left\{ \text{Cos}[t], \text{Cos}[t] - \text{Cos}\left[t - \frac{2\pi}{3}\right] \right\}, \{t, 0, 6\pi\} \right]$

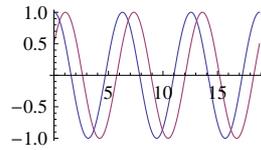


c) La suma de los dos primeros es

$$\cos t + \cos\left(t - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos t + \cos t \cos \frac{2\pi}{3} + \sin t \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} \cos t + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t = \cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$$

Es un atraso de la onda coseno en $\frac{\pi}{3} \equiv 60^\circ$ con la misma amplitud.

Plot $\left[\left\{ \text{Cos}[t], \text{Cos}[t] + \text{Cos}\left[t - \frac{2\pi}{3}\right] \right\}, \{t, 0, 6\pi\} \right]$



CONVOLUCIÓN CIRCULAR

Sean $x(t)$ e $y(t)$ dos funciones seccionalmente continuas y de período p .

Se define la convolución circular mediante

$$(x \otimes y)(t) = \int_0^p x(\tau) y(t - \tau) d\tau$$

Observemos que la función de τ : $z(\tau) = x(\tau) y(t - \tau)$ tiene período p y, por un lema previo, la integral se puede hacer en cualquier intervalo de longitud p :

$$(x \otimes y)(t) = \int_0^p x(\tau) y(t - \tau) d\tau = \int_\alpha^{p+\alpha} x(\tau) y(t - \tau) d\tau$$

1. La convolución circular $x \otimes y$ tiene período p pues

$$(x \otimes y)(t + p) = \int_0^p x(\tau) y(t + p - \tau) d\tau = \int_0^p x(\tau) y(t - \tau) d\tau = (x \otimes y)(t)$$

2. Es conmutativa pues, haciendo el cambio de variables $t - \tau = \mu$, se tiene

$$\begin{aligned} (x \otimes y)(t) &= \int_0^p x(\tau) y(t - \tau) d\tau = \int_t^{t-p} x(t - \mu) y(\mu) d(-\mu) \\ &= \int_{t-p}^t y(\mu) x(t - \mu) d\mu = \int_0^p y(\mu) x(t - \mu) d\mu = (y \otimes x)(t) \end{aligned}$$

Ejemplo 1

Sean $g_n(t) = e^{int}$ de período 2π .

$$(g_n \otimes g_m)(t) = \int_0^{2\pi} e^{in\tau} e^{im(t-\tau)} d\tau = e^{imt} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\tau} d\tau = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ 2\pi & n = m \end{cases}$$

Ejemplo 2

La función $g(t) = |\sin t|$ tiene período π . Calculamos $(g \otimes g)(t)$ para $0 < t < \pi$.

$$\begin{aligned} (g \otimes g)(t) &= \int_0^\pi |\sin \tau| |\sin(t-\tau)| d\tau = \int_0^\pi \sin \tau |\sin(t-\tau)| d\tau \\ &= \int_0^t \sin \tau \sin(t-\tau) d\tau - \int_t^\pi \sin \tau \sin(t-\tau) d\tau = \frac{1}{2}(\pi - t) \cos t + \sin t \end{aligned}$$

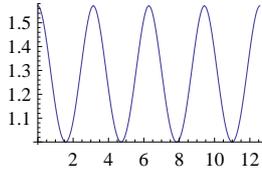
Esta expresión es el modelo de la convolución circular, válido en el período $0 \leq t \leq \pi$.

Resulta una función con derivada continua.

$$\int_0^t \sin[\tau] \sin[t - \tau] d\tau - \int_t^\pi \sin[\tau] \sin[t - \tau] d\tau // \text{Simplify}$$

$$\frac{1}{2} (\pi - 2t) \cos[t] + \sin[t]$$

```
f[t_] := 1/2 (π - 2 t) Cos[t] + Sin[t]
Plot[f[Mod[t, π]], {t, 0, 4 π}]
```



Si $x(t)$ e $y(t)$ son seccionalmente continuas, la convolución circular es continua.

Más aún, como ocurre con la convolución común, mejora la regularidad que ambas funciones.

Esto queda avalado por el siguiente resultado, que muestra que la serie de Fourier de la convolución tiene coeficientes que tienden a cero más rápido que los de ambas funciones.

Teorema

Si los coeficientes de Fourier de $x(t)$ e $y(t)$ son $\{x_k\}$ y $\{y_k\}$ respectivamente, entonces los de $x \otimes y$ son $\{p x_k y_k\}$.

Demostración

Calculamos los coeficientes de Fourier de la convolución circular.

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \int_0^p (x \otimes y)(t) e^{-\frac{2\pi k i}{p} t} dt &= \frac{1}{p} \int_0^p \left(\int_0^p x(\tau) y(t-\tau) d\tau \right) e^{-\frac{2\pi k i}{p} t} dt \\ &= \frac{1}{p} \int_0^p x(\tau) \left(\int_0^p y(t-\tau) e^{-\frac{2\pi k i}{p} t} dt \right) d\tau = \frac{1}{p} \int_0^p x(\tau) \left(\int_{-\tau}^{p-\tau} y(s) e^{-\frac{2\pi k i}{p} (s+\tau)} ds \right) d\tau \\ &= \frac{1}{p} \int_0^p x(\tau) e^{-\frac{2\pi k i}{p} \tau} \left(\int_{-\tau}^{p-\tau} y(s) e^{-\frac{2\pi k i}{p} s} ds \right) d\tau = p \frac{1}{p} \left(\int_0^p x(\tau) e^{-\frac{2\pi k i}{p} \tau} d\tau \right) \frac{1}{p} \left(\int_0^p y(s) e^{-\frac{2\pi k i}{p} s} ds \right) \end{aligned}$$

que es la tesis. Hemos usado que

$$\int_{-\tau}^{p-\tau} y(s) e^{-\frac{2\pi k i}{p} s} ds = \int_0^p y(s) e^{-\frac{2\pi k i}{p} s} ds$$

pues el integrando es de período p .

q.e.d.

Para calcular una convolución circular $x \otimes y$ en un valor t , $0 < t < p$, dibujamos las funciones

$x(\tau)$ y $y(t-\tau)$ para τ en el período $0 < \tau < p$, multiplicamos $x(\tau) y(t-\tau)$ e integramos.

Naturalmente, como en el caso de una convolución común, pueden haber instancias de cálculo diferentes al mover t desde 0 a p .

Ejemplo 3

Sean $x(t) = t$, $0 < t < 1$, de período 1 e $y(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$ de período 1

```

y[t_] := If[0 < t < 1/2, 1, 0]
g1 = Plot[Mod[t, 1], {t, -2, 3}, AspectRatio -> Automatic, PlotStyle -> {Thick}];
g2 = Plot[y[Mod[t, 1]], {t, -1.5, 3}, AspectRatio -> Automatic, PlotStyle -> {Thick}];
GraphicsGrid[{{g1, g2}}]

```



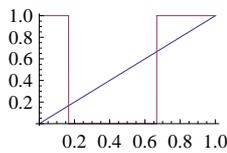
a) Calculamos la convolución circular.

Graficamos $x(\tau)$, $y(t - \tau)$ en todo un período, primero para $0 < t < \frac{1}{2}$ y luego para $\frac{1}{2} < t < 1$.

```

Plot[{Mod[tau, 1], y[Mod[1/6 - tau, 1]]}, {tau, 0, 1}]

```



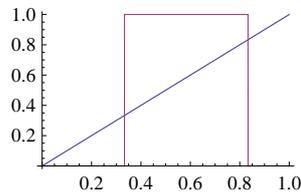
$$\int_0^t \tau \, d\tau + \int_{t+\frac{1}{2}}^1 \tau \, d\tau // \text{Simplify}$$

$$\frac{1}{8} (3 - 4 t)$$

```

Plot[{Mod[tau, 1], y[Mod[5/6 - tau, 1]]}, {tau, 0, 1}]

```



$$\int_{t-\frac{1}{2}}^t \tau \, d\tau // \text{Simplify}$$

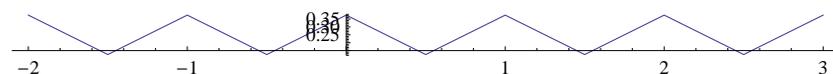
$$\frac{1}{8} (-1 + 4 t)$$

Luego $z(t) = (x \otimes y)(t) = \begin{cases} -\frac{t}{2} + \frac{3}{8} & \text{para } 0 < t < \frac{1}{2} \\ \frac{t}{2} - \frac{1}{8} & \text{para } \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$

```

z[t_] := If[0 < t < 1/2, -t/2 + 3/8, t/2 - 1/8]
g3 = Plot[z[Mod[t, 1]], {t, -2, 3}, AspectRatio -> Automatic]

```



b) Comprobamos la relación entre los coeficientes de Fourier.

$$x_k = \int_0^1 t e^{-2\pi i k t} dt // \text{Simplify}$$

$$= \frac{e^{-2 i k \pi} (-1 + e^{2 i k \pi} - 2 i k \pi)}{4 k^2 \pi^2}$$

$$y_k = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i k t} dt // \text{Simplify}$$

$$= \frac{i - i e^{-i k \pi}}{2 k \pi}$$

$$z_k = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{t}{2} + \frac{3}{8} \right) e^{-2\pi i k t} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{t}{2} - \frac{1}{8} \right) e^{-2\pi i k t} dt // \text{Simplify}$$

$$= \frac{e^{-2 i k \pi} (2 - 4 e^{i k \pi} + 3 i k \pi + e^{2 i k \pi} (2 - 3 i k \pi))}{16 k^2 \pi^2}$$

Luego $x_k = \frac{i}{2\pi k}$, $y_k = -\frac{i}{2\pi k} (1 - (-1)^k)$, $z_k = \frac{1}{4\pi^2 k^2} (1 - (-1)^k) \Rightarrow z_k = x_k y_k$.

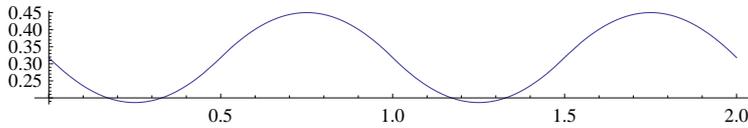
Ejemplo 4

Sea $y(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$ de período 1. Calculamos $y(t) \otimes |\sin \pi t|$ que será derivable.

Para $0 < t < \frac{1}{2}$ es $(x \otimes x)(t) = \int_0^t |\sin \pi \tau| d\tau + \int_{t+\frac{1}{2}}^1 |\sin \pi \tau| d\tau = \frac{1}{\pi} (2 - \cos \pi t - \sin \pi t)$

Para $\frac{1}{2} < t < 1$ es $(x \otimes x)(t) = \int_{t-\frac{1}{2}}^1 |\sin \pi \tau| d\tau = \frac{1}{\pi} (-\cos \pi t + \sin \pi t)$

```
f[t_] := If[0 < t < 1/2, 1/π (2 - Cos[π t] - Sin[π t]), 1/π (-Cos[π t] + Sin[π t])]
Plot[f[Mod[t, 1]], {t, -0, 2}, AspectRatio -> Automatic]
```



Ejercicio

Sea $x(t) = t$ para $0 < t < 1$ de período 1. Calcular y graficar $x \otimes x$.

Rta. Es continua, de período 1 con modelo $-\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t + \frac{1}{6}$ en $0 < t < 1$

Ejercicio

Sean $x(t)$ de período 1 con modelo $\begin{cases} t & 0 < t < \frac{1}{2} \\ 1-t & \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$, e $y(t) = x'(t)$ de período 1.

a) Comprobar que $x \otimes y$ es de período 1 con modelo $\begin{cases} 2t^2 - t & 0 < t < \frac{1}{2} \\ -1 + 3t - 2t^2 & \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$, y tiene derivada continua.

b) Verificar la relación multiplicativa de los coeficientes de Fourier.

Ejercicio

a) Sea $y(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$ de período 1. Calcular y graficar $y \otimes y$

b) Sea $v(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < \frac{1}{2} \\ -1 & \text{si } \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$ de período 1. Calcular y graficar $v \otimes y$ y $v \otimes v$.

c) Sean n, m enteros. Probar que $\sin(2n\pi t)$ y $\cos(2m\pi t)$ de período 1 tienen convolución circular 0.

Ejercicio

Sean $x(t)$ e $y(t)$ de período p . Probar que:

- a) si ambas son pares o ambas impares, entonces $x \otimes y$ es par;
- b) si una es par y la otra es impar, entonces $x \otimes y$ es impar.

Ejercicio

Si $x(t)$ tiene período p probar que $\tilde{x}(t) = x(-t)$ también.

Deconvolución circular

Si la ecuación $x(t) \otimes c(t) = d(t)$ tiene solución, entonces los coeficientes de Fourier verifican $p x_k c_k = d_k$.

Luego, una condición necesaria para que la ecuación tenga solución, es que: $c_k = 0 \Rightarrow d_k = 0$.

Si se cumple esta condición, se tienen dos casos.

Caso 1 .Si $c_k \neq 0$ para todo k , entonces habrá solución única con los coeficientes de Fourier dados por $p x_k = d_k c_k^{-1}$.

Caso 2. Para algún k se tiene $c_k = d_k = 0$, entonces hay infinitas soluciones cuyos coeficientes son:

para $c_k \neq 0$: $p x_k = d_k c_k^{-1}$ y para $c_k = 0$ se toma x_k cualquiera.

En cada caso habrá que estudiar la convergencia de la serie de Fourier formal resultante.

Ejemplo 1

Sea $x(t) \otimes c(t) = \text{sen } 2\pi t$ donde $c(t)$ tiene período 1 y modelo $\begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$

Los coeficientes son $c_k = \begin{cases} -\frac{i}{k\pi} & \text{si } k \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } k \text{ es par} \end{cases}$, $d_k = \begin{cases} \mp \frac{i}{2} & \text{si } k = \pm 1 \\ 0 & \text{si } k \neq \pm 1 \end{cases}$, y son compatibles.

Luego debe ser

$$x_1 = -\frac{i}{2} \frac{\pi}{(-i)} = \frac{\pi}{2}, \quad x_{-1} = \frac{i}{2} \frac{\pi}{i} = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad x_{2k+1} = 0 \quad \text{si } k \neq 0, -1$$

Los coeficientes pares x_{2k} son arbitrarios, siempre que la serie resultante sea convergente.

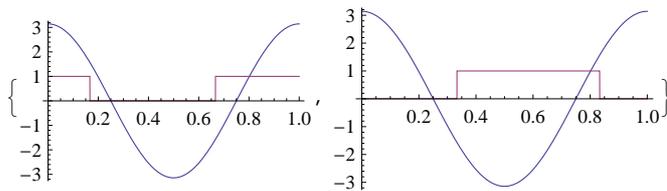
Tomando $x_{2k} = 0$ queda $x(t) = \frac{\pi}{2} (e^{2\pi t i} + e^{-2\pi t i}) = \pi \cos 2\pi t$.

Comprobamos que es una solución calculando la convolución $x(t) \otimes c(t)$ en las dos instancias: $0 < t < \frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2} < t < 1$.

$$c[t_] := \text{If}[0 < t < \frac{1}{2}, 1, 0]$$

$$\{\text{Plot}[\{\pi \text{Cos}[2 \pi t], c[\text{Mod}[\frac{1}{6} - t, 1]]\}, \{t, 0, 1\}],$$

$$\text{Plot}[\{\pi \text{Cos}[2 \pi t], c[\text{Mod}[\frac{5}{6} - t, 1]]\}, \{t, 0, 1\}]\}$$



$$\int_0^t \pi \text{Cos}[2 \pi \tau] d\tau + \int_{t+\frac{1}{2}}^1 \pi \text{Cos}[2 \pi \tau] d\tau$$

$$\text{Sin}[2 \pi t]$$

$$\int_{t-\frac{1}{2}}^t \pi \cos[2\pi\tau] d\tau$$

$$\sin[2\pi t]$$

Ejemplo 2

Sea $x(t) \otimes c(t) = \sin 2\pi t$ con $c(t) = 1$ considerada con período 1.

Se tiene $c_0 = 1$, $c_k = 0$ si $k \neq 0$. No son compatibles y no hay solución.

Ejemplo 3

Sean $c(t)$ y $d(t)$ de período 2 y modelos respectivos $\begin{cases} 1 & -1 < t < 0 \\ -1 & 0 < t < 1 \end{cases}$ y $\begin{cases} 1+t & -1 < t < 0 \\ 1-t & 0 < t < 1 \end{cases}$, $d'(t) = c(t)$.

a) Consideramos la ecuación $x(t) \otimes c(t) = d(t)$.

Los coeficientes son

$$c_{(2k+1)} = \frac{2i}{(2k+1)\pi}, c_{2k} = 0 \quad \text{y} \quad d_{2k+1} = \frac{2}{(2k+1)^2\pi^2}, d_0 = \frac{1}{2}, d_{2k} = 0 \text{ si } k \neq 0$$

que son incompatibles, pues $c_0 = 0$ pero $d_0 \neq 0$.

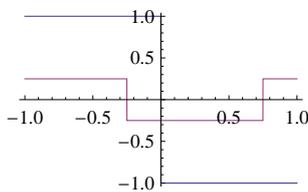
b) En cambio la ecuación $x(t) \otimes c(t) = d(t) - \frac{1}{2}$ es compatible, pues ahora $d_0 = 0$, y como los otros coeficientes no cambian, hay compatibilidad. Hay infinitas soluciones.

Ponemos $x_{2k+1} = \frac{1}{2} \frac{d_{2k+1}}{c_{2k+1}} = \frac{-i}{2(2k+1)\pi}$, $x_{2k} = 0$ si $k \neq 0$ y obtenemos $x(t) = -\frac{1}{4} c(t)$.

Comprobamos que es una solución.

Para $-1 < t < 0$:

```
c[t_] := If[0 < t < 1, -1, 1]
Plot[{c[t], -1/4 c[Mod[-1/4 - t, 2]]}, {t, -1, 1}]
```



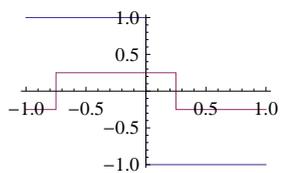
$$\int_{-1}^t \frac{1}{4} d\tau - \int_t^0 \frac{1}{4} d\tau + \int_0^{t+1} \frac{1}{4} d\tau - \int_{t+1}^1 \frac{1}{4} d\tau // \text{Simplify}$$

$$\frac{1}{2} + t$$

Para $0 < t < 1$

```
c[t_] := If[0 < t < 1, -1, 1]
```

```
Plot[{c[t], -1/4 c[Mod[1/4 - t, 2]]}, {t, -1, 1}]
```



```
- ∫-1t-1 1/4 dτ + ∫t-10 1/4 dτ - ∫0t 1/4 dτ + ∫t1 1/4 dτ // Simplify
```

```
1/2 - t
```