

TRANSFORMADA DE FOURIER

Motivación y ejemplos.

Los coeficientes de Fourier de una función periódica analizan su contenido armónico, y con esta información, se la sintetiza a través de la serie de Fourier.

Queremos encontrar un método similar para funciones no periódicas.

Sea $f(t)$ una función cualquiera. Procedemos de manera eurística para encontrar tal método.

Elegimos un número T grande, y consideramos la restricción de f al intervalo simétrico $[-T/2, T/2]$ de longitud T , y la extendemos en forma periódica con período T . Esta función periódica tiene coeficientes y serie de Fourier dados por expresiones conocidas y coincide con $f(t)$ en ese intervalo. Haremos $T \rightarrow +\infty$ en esas expresiones buscando un resultado viable.

Sea $\omega_n = (2\pi n)/T$, múltiplo de la frecuencia fundamental $(2\pi)/T$, y $\Delta\omega_n = \omega_{n+1} - \omega_n = (2\pi)/T$.

En el intervalo $|t| < \frac{T}{2}$ se reconstruye la función mediante la serie de Fourier

$$\begin{aligned} f(t) &\approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i \frac{2\pi n}{T} t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) e^{-i \frac{2\pi n}{T} \tau} d\tau \right) e^{i \frac{2\pi n}{T} t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) e^{-i \omega_n \tau} d\tau \right) e^{i \omega_n t} \Delta\omega_n \end{aligned}$$

Si hacemos $T \rightarrow \infty$, esperamos recuperar toda la función $f(t)$ como suma de armónicos, y para ello tratamos de entender a qué se podría acercar la expresión anterior.

Aventuramos que la integral dentro del paréntesis se aproxima a $\hat{f}(\omega_n) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i \omega_n \tau} d\tau$.

Por otro lado, observamos que, cuando $T \rightarrow \infty$ se tiene $\Delta\omega_n \rightarrow 0$, y la serie anterior se asemeja, grosso modo, a una suma de Riemann para el cálculo de la integral de $\hat{f}(\omega) e^{i \omega t}$, lo cual deja la posible igualdad

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i \omega t} d\omega$$

El lado derecho es nuestra candidato para reemplazar la serie de Fourier y estudiaremos bajo qué condiciones la igualdad es cierta. A diferencia del caso periódico, notamos que, en principio se necesitan todas las frecuencias ω para reconstruir la función f . Para cada frecuencia ω aparece una "densidad" de intensidad:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i \omega \tau} d\tau$$

que se llama Transformada de Fourier de $f(t)$. y el armónico correspondiente, necesario para sintetizar $f(t)$, sería $(2\pi)^{-1} \hat{f}(\omega) e^{i \omega t} \Delta\omega$ con $\Delta\omega$ pequeño, y se entrevé la fórmula de inversión

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i \omega t} d\omega$$

que sintetizaría f como "suma" de densos armónicos.

Para que exista la Transformada de Fourier es suficiente que $f(t)$ sea seccionalmente continua y absolutamente integrable.

Como veremos en los ejemplos que siguen, la transformada $\hat{f}(\omega)$ puede no ser absolutamente integrable, pero demostraremos, en el próximo párrafo, que se puede establecer una fórmula de inversión usando el "valor principal":

$$f(t) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = p.v. \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

en los puntos t en que f sea derivable.

Antes de pasar a los ejemplos calcularemos dos integrales muy útiles en esta unidad.

Teorema

a) La integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge condicionalmente a π .

b) La integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos at - \cos bt}{t^2} dt$ converge absolutamente a $\pi(|b| - |a|)$

Demostración

a₁) La función $\frac{\sin t}{t}$ no es absolutamente integrable en toda la recta pues

$$\int_{\pi}^{n\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt = \sum_{k=1}^n \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)\pi}$$

y, como esta serie armónica diverge, la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt$ también diverge a $+\infty$.

También podemos aproximar numéricamente la integral y observar que crece más allá de todo valor.

$$\text{Table} \left[2 \int_0^{k \cdot 10} \text{Abs} \left[\frac{\text{Sin}[t]}{t} \right] dt // \text{N}, \{k, 1, 4\} \right]$$

{5.11749, 6.02575, 6.55988, 6.93276}

a₂) La integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ es convergente pues, integrando por partes, se tiene

$$\int_0^M \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt + \int_1^M \frac{\sin t}{t} dt = \int_1^M \frac{\sin t}{t} dt + \cos 1 - \frac{\cos M}{M} - \int_1^M \frac{\cos t}{t^2} dt$$

y la última integral es absolutamente convergente y por lo tanto es convergente.

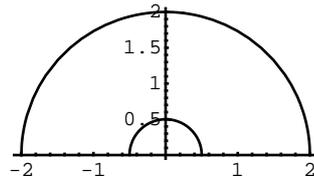
a₃) Usando el teorema de Cauchy de variable compleja calcularemos su valor.

La función $\frac{e^{iz}}{z}$ es analítica en la región $\Omega_{r,R} = \{z : r < |z| < R, \text{Im}(z) > 0\}$ y,

por el teorema de Cauchy, la integral a lo largo del borde es cero: $\int_{\partial\Omega_{r,R}} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$.

El borde $\partial\Omega_{r,R}$, que lo recorreremos en sentido positivo, consta de 4 tramos:

$$C_R = \{R e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}, \quad [-R, -r], \quad C_r = \{r e^{-i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi\}, \quad [r, R]$$



Luego

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{it}}{t} dt + \int_r^R \frac{e^{it}}{t} dt + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

Calculamos la integral a lo largo de los 4 tramos y hacemos que $r \rightarrow 0$ y $R \rightarrow \infty$.

$$\int_{-R}^{-r} \frac{e^{it}}{t} dt + \int_r^R \frac{e^{it}}{t} dt = \int_{r \leq |t| \leq R} \frac{e^{it}}{t} dt = 2i \int_r^R \frac{\sin t}{t} dt$$

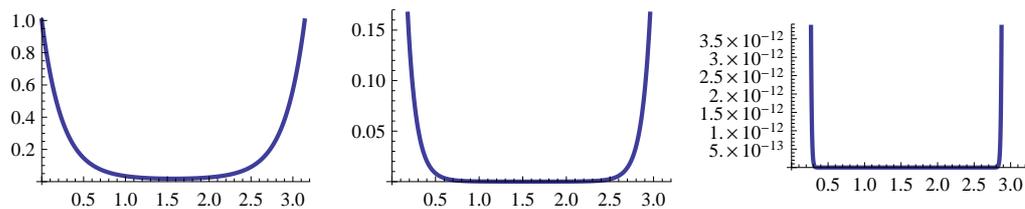
$$\lim_{r \rightarrow 0} \left[\int_{-R}^{-r} \frac{e^{it}}{t} dt + \int_r^R \frac{e^{it}}{t} dt \right] = 2i \int_0^R \frac{\sin t}{t} dt = i \int_{-R}^R \frac{\sin t}{t} dt$$

Además

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| = \left| \int_0^\pi \frac{e^{iR\cos\theta - R\sin\theta}}{R e^{i\theta}} i R e^{i\theta} d\theta \right| \leq \int_0^\pi e^{-R\sin\theta} d\theta$$

Gráficamente la función positiva $e^{-R\sin\theta}$, se ve que el área bajo la curva se hace cada vez más pequeña cuando R crece. La graficamos para $R = 4, 10, 100$.

```
g[R_] := Plot[e^{-R \sin[\theta]}, {\theta, 0, \pi}, PlotStyle -> {Thick}]
GraphicsGrid[{{g[4], g[10], g[100]}]}
```



Lo probaremos.

Observemos que, si $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, por convexidad de la función $\sin \theta$, resulta $\frac{2\theta}{\pi} \leq \sin \theta$.

Luego

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| \leq \int_0^\pi e^{-R \sin \theta} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin \theta} d\theta \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \frac{2\theta}{\pi}} d\theta = \frac{\pi}{R} (1 - e^{-R})$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

Además

$$\int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{C_r} \frac{1}{z} dz + \int_{C_r} g(z) dz = i\pi + \int_{C_r} g(z) dz$$

donde $g(z) = \frac{e^{iz}-1}{z}$ es continua, por lo tanto acotada en un entorno del origen $|g(z)| \leq M$,

$$\left| \int_{C_r} g(z) dz \right| \leq M \pi r \quad \Rightarrow \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} g(z) dz = 0$$

Luego

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \left(\int_{-R}^{-r} \frac{e^{it}}{t} dt + \int_r^R \frac{e^{it}}{t} dt + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz - \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz \right) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(2i \int_0^R \frac{\sin t}{t} dt + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz - i\pi \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto vemos que el límite $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{\sin t}{t} dt$ vale $\frac{\pi}{2}$.

b) La segunda integral claramente converge absolutamente.

Podemos suponer que $a > 0$ y $b > 0$. Utilizamos la misma región que para el cálculo anterior.

La función $\frac{e^{iaz} - e^{ibz}}{z^2}$ es analítica, salvo un polo simple en el origen, y por lo tanto por el teorema de Cauchy

$$0 = \int_{\partial\Omega_{r,R}} \frac{e^{iaz} - e^{ibz}}{z^2} dz = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{iat} - e^{ibt}}{t^2} dt + \int_r^R \frac{e^{iat} - e^{ibt}}{t^2} dt + \int_{C_R} \frac{e^{iaz} - e^{ibz}}{z^2} dz - \int_{C_r} \frac{e^{iaz} - e^{ibz}}{z^2} dz$$

La primera y segunda integral suman, cuando $r \rightarrow 0$ y $R \rightarrow \infty$, la integral que nos interesa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos at - \cos bt}{t^2} dt.$$

Como $a > 0$ y $b > 0$, la tercera integral tiende a cero cuando $R \rightarrow \infty$ pues el integrando está acotado por $\frac{2}{R^2}$. Para la cuarta integral, desarrollando en Taylor el numerador del integrando, obtenemos

$$\int_{C_r} \frac{e^{iaz} - e^{ibz}}{z^2} dz = \int_{C_r} \frac{ia - ib}{z} dz + \int_{C_r} g(z) dz = \pi(a - b) + \int_{C_r} g(z) dz$$

con $g(z)$ continua en un entorno del origen, y por lo tanto acotada, y entonces

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} g(z) dz = 0 \quad \text{Por lo tanto} \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} \frac{e^{iaz} - e^{ibz}}{z^2} dz = \pi(a - b).$$

q.e.d.

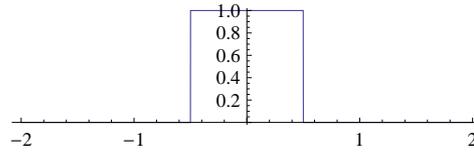
Ejercicio

Probar que:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } at}{t} dt = \pi \text{sg}(a) = \begin{cases} \pi & \text{si } a > 0 \\ -\pi & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Ejemplo 1.1

Analizamos en detalle el ejemplo del escalón unitario simétrico y finito: $f(t) = \Pi_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]}(t)$

```
T[t_] := If[-0.5 <= t < 0.5, 1, 0]
Plot[T[t], {t, -2, 2}, AspectRatio -> Automatic]
```

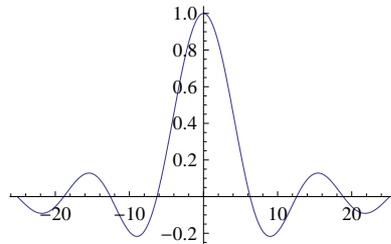


La transformada de Fourier es

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-i\omega t} dt = \frac{\text{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}}$$

y su gráfica es:

```
Plot[ Sin[ω/2] / (ω/2), {ω, -8π, 8π}, PlotRange -> All]
```



Veamos que vale la fórmula de inversión:

$$I(t) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \frac{\text{sen}(\omega/2)}{\omega/2} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(\omega/2)}{\omega/2} \cos(\omega t) d\omega$$

Por trigonometría

$$\text{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right) \cos(\omega t) = \frac{1}{2} \left\{ \text{sen} \omega \left(\frac{1}{2} + t\right) + \text{sen} \omega \left(\frac{1}{2} - t\right) \right\}$$

y por ello usando el teorema anterior

$$I(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen} \omega \left(\frac{1}{2} + t\right) + \text{sen} \omega \left(\frac{1}{2} - t\right)}{\frac{1}{2}\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \left\{ \pi \text{sg}\left(\frac{1}{2} + t\right) + \pi \text{sg}\left(\frac{1}{2} - t\right) \right\} = f(t)$$

Veamos en forma gráfica cómo la fórmula de inversión, en el sentido del valor principal, aproxima a la función mediante suma de armónicos de frecuencias entre $-M$ y M a medida que M crece.

Usamos la función seno-integral: $\text{seni}(t) = \int_0^t \frac{\text{sen} \tau}{\tau} d\tau$ que está incorporada al programa *Mathematica*.

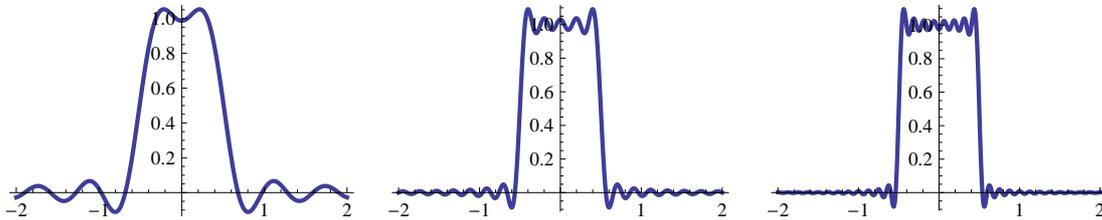
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \frac{\text{sen} \omega \left(\frac{1}{2} + t\right) + \text{sen} \omega \left(\frac{1}{2} - t\right)}{\frac{1}{2}\omega} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^M \frac{\text{sen} \omega \left(\frac{1}{2} + t\right) + \text{sen} \omega \left(\frac{1}{2} - t\right)}{\frac{1}{2}\omega} d\omega = \frac{1}{\pi} \left[\text{seni} M \left(\frac{1}{2} + t\right) + \text{seni} M \left(\frac{1}{2} - t\right) \right]$$

Tomamos $M = 10, 30, 50$

```

h[n_, t_] := 1/π (SinIntegral[n (1/2 + t)] + SinIntegral[n (1/2 - t)])
n = 10; g1 = Plot[h[n, t], {t, -2, 2}, PlotStyle -> {Thick}];
n = 30; g2 = Plot[h[n, t], {t, -2, 2}, PlotStyle -> {Thick}];
n = 50; g3 = Plot[h[n, t], {t, -2, 2}, PlotStyle -> {Thick}];
GraphicsGrid[{{g1, g2, g3}}]

```



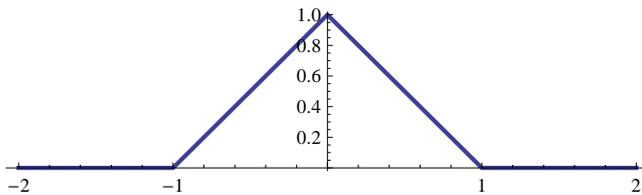
Ejemplo 1.2

Hallamos la transformada de Fourier del triángulo $\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| \geq 1 \end{cases}$.

```

T[t_] := Which[-1 ≤ t < 0, 1 + t, 0 ≤ t < 1, 1 - t, True, 0];
Plot[T[t], {t, -2, 2}, AspectRatio -> Automatic, PlotStyle -> {Thick}]

```



La transformada de Fourier de $\Lambda(t)$ es $\hat{\Lambda}(\omega) = \frac{2(1 - \cos \omega)}{\omega^2} = \left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}\right)^2 = \text{sinc}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$

Esta transformada es par y absolutamente integrable.

Aproximamos armónicamente $\Lambda(t)$ con la fórmula de inversión. Usando la paridad, ver ejercicio, queda

$$\Lambda(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \frac{2(1 - \cos \omega)}{\omega^2} \cos \omega t d\omega$$

Ejercicio

Demuestre esta fórmula de inversión utilizando la igualdad trigonométrica

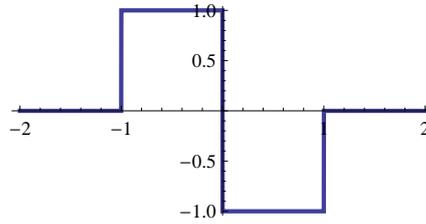
$$\frac{2(1 - \cos \omega)}{\omega^2} \cos \omega t = \frac{\cos \omega t - \cos \omega(1+t)}{\omega^2} + \frac{\cos \omega t - \cos \omega(1-t)}{\omega^2}$$

y la fórmula obtenida en el teorema anterior.

Ejemplo 1.3

Consideremos la derivada $\Lambda'(t)$ que es una función real impar y discontinua.

```
f[t_] := Which[-1 < t < 0, 1, 0 < t < 1, -1, True, 0]
Plot[f[t], {t, -2, 2}, AspectRatio -> Automatic, PlotStyle -> {Thick}]
```



La transformada de Fourier de la derivada $\Lambda'(t)$ es $2i \frac{1-\cos \omega}{\omega} = 2i \frac{1}{\omega} \text{sen}^2\left(\frac{\omega}{2}\right)$ que es imaginaria pura e impar.

Podemos comprobar la fórmula de inversión

$$\Lambda'(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M 2i \frac{1-\cos \omega}{\omega} e^{i\omega t} d\omega = \lim_{M \rightarrow \infty} -\frac{1}{\pi} \int_{-M}^M \frac{1-\cos \omega}{\omega} \text{sen } \omega t d\omega$$

En efecto, escribiendo $2 \cos \omega \text{sen } \omega t = \text{sen } \omega(t+1) + \text{sen } \omega(t-1)$ se tiene

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos \omega}{\omega} \text{sen } \omega t d\omega &= -\frac{1}{\pi} \left\{ \pi \text{sg}(t) - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } \omega(t+1) + \text{sen } \omega(t-1)}{\omega} d\omega \right\} \\ &= -\left\{ \text{sg}(t) - \frac{1}{2} [\text{sg}(t+1) + \text{sg}(t-1)] \right\} \end{aligned}$$

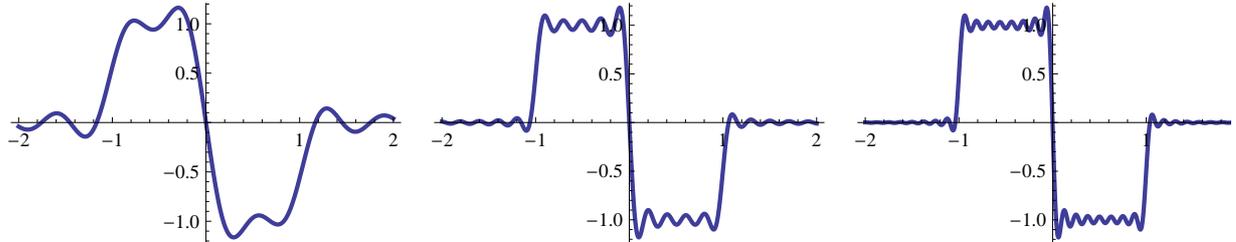
que es justamente la función $\Lambda'(t)$.

Graficamos la aproximación armónica para frecuencias en el intervalo $-10 \leq \omega \leq 10$, luego para $-30 \leq \omega \leq 30$ y finalmente para $-50 \leq \omega \leq 50$. Observamos cómo las frecuencias más altas contribuyen a mejorar la aproximación. Se observa además el llamado "fenómeno de Gibbs": en las proximidades de un salto la gráfica sobresale, a uno y otro lado, en aproximadamente un 9% del salto.

```
h[n_, t_] := -\frac{2}{\pi} \left( \text{SinIntegral}[n(t)] - \frac{1}{2} ( \right.
```

$$\left. \text{SinIntegral}[n(t+1)] + \text{SinIntegral}[n(t-1)] \right)$$

```
g1 = Plot[h[10, t], {t, -2, 2}, PlotStyle -> {Thick}];
g2 = Plot[h[30, t], {t, -2, 2}, PlotStyle -> {Thick}];
g3 = Plot[h[50, t], {t, -2, 2}, PlotStyle -> {Thick}];
GraphicsGrid[{{g1, g2, g3}}]
```



Ejemplo 1.4

La función $f(t) = \frac{\text{sen } t}{t}$ tiene transformada de Fourier

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } t}{t} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } t}{t} \cos \omega t dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } t(1+\omega) + \text{sen } t(1-\omega)}{t} dt = \frac{\pi}{2} [\text{sg}(1+\omega) + \text{sg}(1-\omega)] = \pi \Pi_{[-1,1]}(\omega)$$

Antitransformando y aproximando la integral por una suma de Riemann queda

$$\frac{\text{sen } t}{t} = \int_0^1 \cos(\omega t) d\omega \approx \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \cos\left(\frac{k}{n} t\right)$$

que muestra una aproximación armónica que usa las frecuencias $\frac{k}{n}$, $0 \leq k < n$.

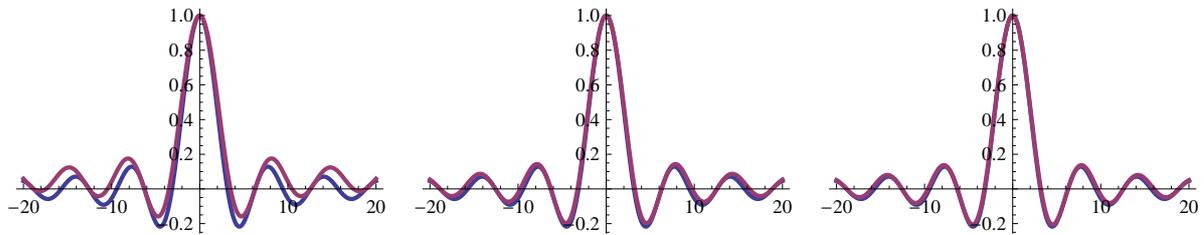
Para $n \rightarrow \infty$ se usa una cantidad densa de frecuencias entre 0 y 1.

Graficamos esta aproximación para $n = 10, 30, 50$.

```

g1 = Plot[ { Sin[t], 1/10 Sum[Cos[k/10 t], {k, 0, 9}] }, {t, -20, 20}, PlotRange -> All, PlotStyle -> {Thick}];
g2 = Plot[ { Sin[t], 1/30 Sum[Cos[k/30 t], {k, 0, 29}] }, {t, -20, 20}, PlotRange -> All, PlotStyle -> {Thick}];
g3 = Plot[ { Sin[t], 1/50 Sum[Cos[k/50 t], {k, 0, 49}] }, {t, -20, 20}, PlotRange -> All, PlotStyle -> {Thick}];
GraphicsGrid[ { {g1, g2, g3} } ]

```



Ejemplo 1.5

La función $e(t) = \prod_{[0,1]}(t)$ tiene transformada de Fourier

$$\hat{e}(\omega) = \frac{1-e^{-i\omega}}{i\omega} = \frac{\text{sen } \omega}{\omega} - i \frac{1-\cos \omega}{\omega}$$

La parte imaginaria no es integrable en toda la recta pues para cada natural n se tiene

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1-\cos \omega}{\omega} d\omega \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} (1-\cos \omega) d\omega = \frac{1}{n+1}$$

y entonces $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{n\pi} \frac{1-\cos \omega}{\omega} d\omega \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k} = +\infty$.

Por ello, en principio, es preciso usar el valor principal en la fórmula de inversión.

Usando el método de los ejemplos anteriores obtenemos para $t \neq 0, 1$:

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \frac{1-e^{-i\omega}}{i\omega} e^{i\omega t} d\omega &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \frac{\cos \omega t - \cos \omega(t-1)}{i\omega} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \frac{\text{sen } \omega t - \text{sen} \omega(t-1)}{\omega} d\omega \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } \omega t - \text{sen} \omega(t-1)}{\omega} d\omega = \frac{1}{2} (\text{sg}(t) - \text{sg}(t-1)) = e(t) \end{aligned}$$

Observe que la primera integral en el paréntesis se anula pues se integra en un intervalo simétrico una función impar.

Para $t = 0$ y $t = 1$ mostrar que el límite es $\frac{1}{2}$.

Ejemplo 1.6

La función $e^{-\alpha t} u(t)$, $\alpha > 0$ tiene transformada $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t} u(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)t} dt = \frac{1}{\alpha+i\omega}$

Comprobamos la fórmula de inversión usando el teorema de los residuos.

Para $t > 0$ consideremos como región el semicírculo superior $\Omega_R^+ = \{z = x + iy : x^2 + y^2 < R, y > 0\}$ que contiene el polo $i\alpha$ y cuyo borde consta de la semicircunferencia $C_R^+ = \{z = x + iy : x^2 + y^2 = R, y > 0\}$ y el segmento $[-R, R]$.

Por lo tanto

$$\int_{\partial\Omega_R^+} \frac{e^{izt}}{\alpha + iz} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i\alpha} \left[\frac{e^{izt}}{\alpha + iz} \right] = 2\pi e^{-\alpha t}$$

Vale la acotación $|e^{i\omega t}| = |e^{i(x+iy)t}| \leq e^{-yt} \leq 1$ y se demuestra como en el teorema que $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^+} \frac{e^{izt}}{\alpha + iz} dz = 0$

y por lo tanto $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\alpha + i\omega} d\omega = 2\pi e^{-\alpha t}$ para $t > 0$.

Para $t < 0$ consideremos como región el semicírculo inferior $\Omega_R^- = \{z = x + iy : x^2 + y^2 < R, y < 0\}$ que no contiene polos y cuyo borde consta de la semicircunferencia $C_R^- = \{z = x + iy : x^2 + y^2 = R, y < 0\}$ y el segmento $[-R, R]$

recorrido en sentido negativo. Como no hay polos $\int_{\partial\Omega_R^-} \frac{e^{izt}}{\alpha + iz} dz = 0$.

Vale la acotación $|e^{i\omega t}| = |e^{i(x+iy)t}| \leq e^{-yt} \leq 1$ y se demuestra como en el teorema que $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^-} \frac{e^{izt}}{\alpha + iz} dz = 0$

y por lo tanto $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\alpha + i\omega} d\omega = 0$ para $t > 0$.

Resumiendo

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{\alpha + i\omega} d\omega = e^{-\alpha t} u(t)$$

Ejercicio

Calcular la transformada de Fourier de la función $\begin{cases} t & \text{si } |t| < 1 \\ 0 & \text{si } |t| > 1 \end{cases}$ y comprobar la fórmula de inversión.

Ejercicio

a) Mostrar que la transformada de Fourier de $\frac{1-\cos t}{t}$ es $-\pi i \operatorname{sg}(\omega) \prod_{[-1,1]}(\omega)$

b) Comprobar la fórmula de inversión.

Ejercicio

Calcular la transformada de $e^{\beta t} u(-t)$, $\beta > 0$ y comprobar la fórmula de inversión.

Propiedades de paridad

Con hipótesis adecuadas sobre las funciones recordamos que

- a) Si $f(t)$ es par entonces la derivada $f'(t)$ es impar.
- b) Si $f(t)$ es impar entonces la derivada $f'(t)$ es par.
- c) Si $f(t)$ y $g(t)$ son ambas pares o ambas impares entonces $f * g$ es par.
- d) Si $f(t)$ es par y $g(t)$ es impar entonces $f * g$ es impar.

1. Si $f(t)$ es una función real par entonces

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-it\omega} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt + i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt$$

por lo tanto

$$\hat{f}(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(-\omega) t dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt = \hat{f}(\omega)$$

luego la transformada es real par.

Por ejemplo $\Pi_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]}(t)$ es real par y su transformada $\frac{\text{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\left(\frac{\omega}{2}\right)}$ es real par.

2. Si $f(t)$ es una función real impar entonces

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-it\omega} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t dt + i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt = i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt$$

por lo tanto

$$\hat{f}(-\omega) = i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(-\omega) t dt = -i \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t dt = -\hat{f}(\omega)$$

luego la transformada es imaginaria pura e impar.

Por ejemplo $\Lambda'(t)$ es real impar y su transformada es $2i \frac{1-\cos \omega}{\omega}$ que es imaginaria pura e impar.

TRANSFORMADA DE FOURIER Y FÓRMULA DE INVERSIÓN

En esta sección demostraremos la fórmula de inversión.

Teorema 1

Sea $f(t)$ una función seccionalmente continua y absolutamente integrable en toda la recta.

a) Tiene transformada de Fourier

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

b) La transformada $\hat{f}(\omega)$ es una función continua de ω y acotada $|\hat{f}(\omega)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$.

Demostración

a) Como $|f(t) e^{-i\omega t}| = |f(t)|$ entonces $f(t) e^{-i\omega t}$ es absolutamente integrable.

b) Veamos que $\hat{f}(\omega)$ es continua en ω_0 .

Fijamos una cantidad pequeña $\epsilon > 0$ y separamos la integral en dos

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) - \hat{f}(\omega_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) [e^{-i\omega t} - e^{-i\omega_0 t}] dt \\ &= \int_{-R}^R f(t) [e^{-i\omega t} - e^{-i\omega_0 t}] dt + \int_{|t| \geq R} f(t) [e^{-i\omega t} - e^{-i\omega_0 t}] dt \end{aligned}$$

Para la segunda integral se tiene la acotación

$$\left| \int_{|t| \geq R} f(t) [e^{-i\omega t} - e^{-i\omega_0 t}] dt \right| \leq 2 \int_{|t| \geq R} |f(t)| dt$$

que es menor que ϵ a partir de un R_0 por ser f absolutamente integrable. Esto vale cualquiera sea ω .

Para analizar la primera integral tenemos

$$|e^{-i\omega t} - e^{-i\omega_0 t}| = |e^{-i\omega t}(1 - e^{i(\omega-\omega_0)t})| = |1 - e^{i(\omega-\omega_0)t}| = \sqrt{2[1 - \cos(\omega - \omega_0)t]} \leq |(\omega - \omega_0)t|$$

La desigualdad anterior resulta de la desigualdad elemental $2(1 - \cos x) \leq x^2$. Luego

$$\left| \int_{-R_0}^{R_0} f(t) [e^{-i\omega t} - e^{-i\omega_0 t}] dt \right| \leq |\omega - \omega_0| \int_{-R_0}^{R_0} |f(t)| |t| dt = k |\omega - \omega_0|$$

que es menor que ϵ si se elige ω cerca de ω_0 : $|\omega - \omega_0| < \frac{\epsilon}{k}$.

Luego $|\hat{f}(\omega) - \hat{f}(\omega_0)| < 2\epsilon$ si $|\omega - \omega_0| < \frac{\epsilon}{k}$.

q.e.d.

Si la función no es absolutamente integrable puede aún tener transformada de Fourier pero no necesariamente será continua.

Ejemplo 1 $f(t) = \frac{\text{sen } t}{t}$ es integrable pero no es absolutamente integrable y su transformada no es continua

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } t}{t} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } t}{t} \cos \omega t dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(1+\omega)t + \text{sen}(1-\omega)t}{t} dt = \pi \Pi_{[-1, 1]}(\omega)$$

Ejemplo 2 $f(t) = \frac{t}{t^2+1}$ no es integrable pues $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M \frac{t}{t^2+1} dt = \lim_{M \rightarrow \infty} \log \sqrt{M^2+1} = \infty$ pero tiene transformada de Fourier que calculamos por residuos como en ejemplos anteriores:

para $\omega < 0$: $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{t^2+1} e^{-i\omega t} dt = 2\pi i \text{Res}_{z=i} \left(\frac{z}{z^2+1} e^{-i\omega z} \right) = i\pi e^{\omega}$

para $\omega > 0$: $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{t^2+1} e^{-i\omega t} dt = -2\pi i \text{Res}_{z=-i} \left(\frac{z}{z^2+1} e^{-i\omega z} \right) = -i\pi e^{-\omega}$

y no es continua en el origen.

Los coeficientes de Fourier c_n de una función periódica tienden a 0. Dicho en palabras, a medida que la frecuencia aumenta,

la importancia del armónico correspondiente en la síntesis de la función disminuye. Esto es cierto también para funciones no periódicas, es un ingrediente básico para demostrar la fórmula de inversión y lo enunciamos en el teorema siguiente.

Teorema 2 Propiedad de Riemann-Lebesgue

a) Sea $f(t)$ seccionalmente continua en un intervalo finito $[a, b]$. Entonces

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \int_a^b f(t) e^{-i\omega t} dt = \lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \left(\int_a^b f(t) \cos \omega t dt + i \int_a^b f(t) \text{sen } \omega t dt \right) = 0$$

b) Sea $f(t)$ seccionalmente continua y absolutamente integrable en \mathbb{R} . Entonces

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0$$

Demostración

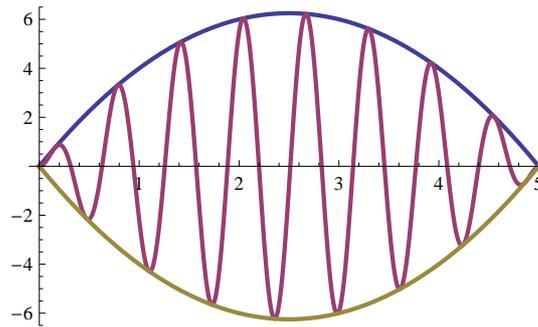
Motivación

La idea es que al aumentar la frecuencia ω la senoidal $\text{sen } \omega t$ oscila más rápido y entonces función $f(t) \text{sen } \omega t$ alterna el signo muy rápido. A medida que ω crece las áreas vecinas de $f(t) \text{sen } \omega t$ son cada vez más parecidas y signo contrario

y su suma es casi cero. En el límite para $\omega \rightarrow \infty$ se anula.

Por ejemplo, sea $f(t) = t(5-t)$, $0 \leq t \leq 5$ y graficamos $f(t) \text{sen } 5t$ que está entre $-f(t)$ y $f(t)$.

```
Plot[{t (5 - t), t (5 - t) Sin[10 t], -t (5 - t)}, {t, 0, 5}, PlotStyle -> {Thick}]
```



a) Para no entrar en detalles muy técnicos hacemos la demostración para $f(t)$ continua y con derivada continua.

Sea $|f(t)| \leq M$ y $|f'(t)| \leq M$. Integrando por partes:

$$\int_a^b f(t) e^{-i\omega t} dt = \left[f(t) \left(\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right) \right]_a^b + \frac{1}{i\omega} \int_a^b f'(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{i}{\omega} [f(b) e^{-i\omega b} - f(a) e^{-i\omega a}] + \frac{1}{i\omega} \int_a^b f'(t) e^{-i\omega t} dt$$

Para el corchete se tiene la acotación $\left| \frac{i}{\omega} [f(b) e^{-i\omega b} - f(a) e^{-i\omega a}] \right| \leq \frac{2M}{|\omega|}$

y para la integral $\left| \frac{1}{i\omega} \int_a^b f'(t) e^{-i\omega t} dt \right| \leq \frac{M(b-a)}{|\omega|}$

y se ve que ambos tienden a 0 para $\omega \rightarrow \pm\infty$. Hemos demostrado en este caso que

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \int_a^b f(t) e^{-i\omega t} dt = 0$$

b) Sea $f(t)$ seccionalmente continua y absolutamente integrable en toda la recta.

Para un número pequeño $\epsilon > 0$ existe R_0 tal que

$$\left| \int_{|t| \geq R} f(t) e^{-i\omega t} dt \right| \leq \int_{|t| \geq R} |f(t)| dt < \epsilon$$

si $R \geq R_0$ y cualquiera sea ω . Por otro lado, usando la parte a), existe ω_0 tal que

$$\left| \int_{-R_0}^{R_0} f(t) e^{-i\omega t} dt \right| < \epsilon \text{ para } |\omega| \geq |\omega_0|$$

Por lo tanto, si $|\omega| \geq |\omega_0|$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right| \leq \left| \int_{|t| \geq R_0} f(t) e^{-i\omega t} dt \right| + \left| \int_{|t| \leq R_0} f(t) e^{-i\omega t} dt \right| < 2\epsilon$$

q.e.d.

Ejemplo

Hemos visto que

$$\mathcal{F}\left(\Pi_{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]}(t)\right)(\omega) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}} \quad \text{y} \quad \mathcal{F}(\Lambda(t))(\omega) = \left(\frac{\operatorname{sen}(\omega/2)}{\omega/2}\right)^2$$

Ambas son continuas y verifican $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0$.

Ejercicio

La función $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ es continua y absolutamente integrable.

Usando residuos probar que $\hat{f}(\omega) = \pi e^{-|\omega|}$. Luego la transformada es continua y $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0$.
Comprobar la fórmula de inversión.

Ejercicio

Mostrar que la transformada de Fourier de $\frac{\operatorname{sen} t}{1+t^2}$ existe y calcularla. Ver que verifica $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0$.

(Ayuda: escribir $\operatorname{sen} t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it})$ y usar la transformada de $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$).

Teorema 3

Si $g(t)$ es seccionalmente continua y absolutamente integrable en la recta y es derivable en 0 entonces

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} Mt}{t} g(t) dt = g(0)$$

Demostración

Para $a > 1$ separamos la integral en dos partes:

$$I(M) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} Mt}{t} g(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\operatorname{sen} Mt}{t} g(t) dt + \frac{1}{\pi} \int_{|t| > a} \frac{\operatorname{sen} Mt}{t} g(t) dt = I_1(M) + I_2(M)$$

Expresamos el número $g(0)$ de la siguiente manera

$$J = g(0) = g(0) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} Mt}{t} dt = g(0) \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\operatorname{sen} Mt}{t} dt + g(0) \frac{1}{\pi} \int_{|t| > a} \frac{\operatorname{sen} Mt}{t} dt = J_1(M) + J_2(M)$$

Observemos que $\int_{|t| > a} \frac{\operatorname{sen} Mt}{t} dt = \int_{|t| > a} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt$ y $\left| \int_{|t| > a} \frac{\operatorname{sen} Mt}{t} g(t) dt \right| \leq \int_{|t| > a} |g(t)| dt$

Como las colas de estas integrales convergentes son pequeñas, elegimos a bastante grande para que $|I_2(M)|$ y $|J_2(M)|$ sean pequeños, digamos menores que un número $\epsilon > 0$ previamente elegido y para cada $M > 1$.

Por el teorema 2 a

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} (I_1(M) - J_1(M)) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a \text{sen } M t \frac{g(t) - g(0)}{t} dt = 0$$

pues, por ser g derivable en 0 , la función $\frac{g(t) - g(0)}{t}$ es absolutamente integrable en el intervalo finito $[-a, a]$.

Luego

$$|I - J| = |I_1 + I_2 - J_1 - J_2| \leq |I_1 - J_1| + |I_2| + |J_2|$$

es pequeño, digamos en valor absoluto menor que 3ϵ , si tomamos M grande.

q.e.d.

Teorema 4 Fórmula de inversión

Sea $f(t)$ seccionalmente continua y absolutamente integrable en \mathbb{R} . Si es derivable en t_0 entonces

$$f(t_0) = \lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \hat{f}(\omega) e^{i\omega t_0} d\omega = \frac{1}{2\pi} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t_0} d\omega$$

Demostración

Para $M > 0$

$$\begin{aligned} \int_{-M}^M \hat{f}(\omega) e^{i\omega t_0} d\omega &= \int_{-M}^M \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right) e^{i\omega t_0} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left(\int_{-M}^M e^{i\omega(t_0 - \tau)} d\omega \right) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) 2 \left(\int_0^M \cos \omega(t_0 - \tau) d\omega \right) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \frac{2 \text{sen } M(t_0 - \tau)}{t_0 - \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \text{sen } M s}{s} f(t_0 - s) ds \end{aligned}$$

La función $g(s) = f(t_0 - s)$ es absolutamente integrable en la recta y es derivable en $s = 0$.

Por ello podemos aplicar el teorema 3 y obtener la tesis.

q.e.d.

1. El teorema 3 se puede interpretar en términos de funciones generalizadas como

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\text{sen } M t}{t} = \delta(t)$$

2. Si \hat{f} es absolutamente integrable, podemos escribir la fórmula de inversión como una integral

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Ejemplo

La transformada de Fourier de $t e^{-t} u(t)$ es $\frac{1}{(1+i\omega)^2}$. Comprobamos la fórmula de inversión.

Para $t > 0$, la integral de $\frac{e^{itz}}{(1+iz)^2}$ en la semicircunferencia superior: $z(\theta) = M e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$, tiende a cero para $M \rightarrow \infty$.

Como en el semiplano superior tiene un polo doble en i , obtenemos:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \frac{1}{(1+i\omega)^2} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \left(2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} \frac{e^{izt}}{(1+iz)^2} \right) = t e^{-t}$$

Para $t < 0$ la integral de $\frac{e^{itz}}{(1+iz)^2}$ en la semicircunferencia inferior: $z(\theta) = M e^{i\theta}$, $\pi \leq \theta \leq 2\pi$, tiende a cero para $M \rightarrow \infty$.

Como no hay polos en el semiplano inferior la integral da cero.

Ejercicio

a) Comprobar que la transformada de Fourier de $f(t) = t e(t)$ es $\frac{i\omega e^{-i\omega} - 1 + e^{-i\omega}}{\omega^2}$

Probar que esta transformada es continua e integrable en toda la recta y que $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0$.

b) Con la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos at - \cos bt}{t^2} dt = \pi (|b| - |a|)$, comprobar la fórmula de inversión de $t e(t)$.

Ayuda

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \frac{1}{\omega^2} (i\omega e^{-i\omega} - 1 + e^{-i\omega}) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \left[\frac{i e^{i(t-1)\omega}}{\omega} + \frac{e^{i(t-1)\omega} - e^{it\omega}}{\omega^2} \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \left\{ \frac{i \cos(t-1)\omega - \operatorname{sen}(t-1)\omega}{\omega} + \frac{[\cos(t-1)\omega - \cos t\omega] + i[\operatorname{sen}(t-1)\omega - \operatorname{sen} t\omega]}{\omega^2} \right\} d\omega \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{\epsilon < |t| < M} \left\{ \frac{i \cos(t-1)\omega - \operatorname{sen}(t-1)\omega}{\omega} + \frac{[\cos(t-1)\omega - \cos t\omega] + i[\operatorname{sen}(t-1)\omega - \operatorname{sen} t\omega]}{\omega^2} \right\} d\omega \end{aligned}$$

Usando paridad queda

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \left\{ \frac{-\operatorname{sen}(t-1)\omega}{\omega} + \frac{[\cos(t-1)\omega - \cos t\omega]}{\omega^2} \right\} d\omega$$

Tomando límite para $M \rightarrow \infty$ se obtiene fácilmente el resultado.

Similitud entre la fórmula de la transformada y la fórmula de inversión.

La transformada es $g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$ y la fórmula de inversión $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega$.

Si cambiamos los roles de las variables en esta última, queda $f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{i\omega t} dt$ y por lo tanto obtenemos que la transformada de Fourier de $g(t)$ es $2\pi f(-\omega)$.

Luego si $\hat{f}(\omega) = g(\omega)$ entonces $\hat{g}(\omega) = 2\pi f(-\omega)$

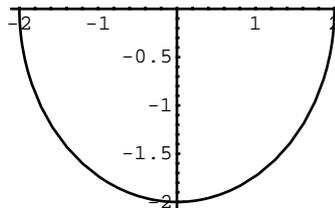
Ejemplo

Para $f(t) = e^{-t}$ la transformada es $g(\omega) = \frac{2}{\omega^2 + 1}$.

Luego la transformada de $\frac{1}{t^2 + 1}$ es $\pi f(-\omega) = \pi e^{-\omega}$

Se puede calcular también directamente usando residuos.

Para $\omega > 0$ integramos en el semicírculo inferior de la figura de radio grande:



$$\int_{C_R} \frac{e^{-i\omega z}}{z^2 + 1} dz - \int_{-R}^R \frac{e^{-i\omega t}}{t^2 + 1} dt = 2\pi i \operatorname{Res}\left[\frac{e^{-i\omega z}}{z-i}, \frac{1}{z+i}, z = -i\right] = 2\pi i \frac{e^{-\omega}}{-2i} = -\pi e^{-\omega}$$

y por ser $\omega > 0$ es $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{-i\omega z}}{z^2 + 1} dz = 0$. Luego $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{t^2 + 1} dt = \pi e^{-\omega}$.

Para $\omega < 0$ integramos en el semicírculo superior análogo de radio grande y obtenemos $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega t}}{t^2 + 1} dt = \pi e^{\omega}$.

Ejercicio

- a) Calcular la transformada de $\frac{1 - \cos t}{t^2}$ utilizando la transformada del triángulo $\Lambda(t)$ y directamente.
- b) Calcular la transformada de $\frac{1 - \cos t}{t}$ utilizando la transformada de la derivada del triángulo $\Lambda'(t)$ y directamente.

Ejercicio

- a) Ver que las transformada de $e^{-at} u(t)$ es $\frac{1}{i\omega + a}$ y la de $t e^{-at} u(t)$ es $\frac{1}{(i\omega + a)^2}$
 la de $e^{at} u(-t)$ es $-\frac{1}{i\omega - a}$ y la de $t e^{at} u(-t)$ es $-\frac{1}{(i\omega - a)^2}$
 y comprobar la fórmula de inversión.

- b) Antitransformar las funciones $\frac{\omega}{(\omega^2 + 1)(i\omega + 1)}$ y $\frac{1}{(i\omega - 1)(i\omega + 1)^2}$ separando en fracciones simples.

Funciones causales y de banda limitada

Una función $f(t)$ se dice causal si $f(t) = 0$ para $t < 0$.

Por ejemplo, la respuesta $h(t)$ de una ecuación lineal $\mathcal{L}(x) = \delta(t)$ al impulso unitario partiendo del reposo es causal.

Una función se dice de banda limitada si existe $\omega_0 > 0$ tal que $\hat{f}(\omega) = 0$ para $|\omega| > \omega_0$.

Por ejemplo, la función $\frac{\text{sen } t}{t}$ es de banda limitada.

Teorema 5

Sea $f(t)$ absolutamente integrable y derivable. Si es causal y de banda limitada entonces $f(t) = 0$.

Demostración

Por la fórmula de inversión y por ser de banda limitada

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Se tiene el desarrollo de Taylor

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \frac{i^k}{k!} \int_{-a}^a \hat{f}(\omega) \omega^k d\omega \right) t^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \frac{i^k}{k!} \int_{-a}^a \hat{f}(\omega) \omega^k d\omega \quad \text{y} \quad |c_k| \leq M \frac{a^k}{k!}$$

pues \hat{f} está acotada. Luego la serie de Taylor converge en todo el plano y $f(t)$ es analítica en todo el plano.

Pero todas las derivadas de $f(t)$ valen cero en los negativos $t < 0$ y por continuidad valen cero en $t = 0$. Por ello

la serie anterior tiene coeficientes $c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) = 0$. Por lo tanto $f(t) = 0$.

q.e.d.

INVERSIÓN DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Estableceremos un vínculo entre la transformada de Fourier y la transformada de Laplace que nos permitirá invertir la Transformada de Laplace.

Sea $f(t)$ una función de \mathcal{F}_e , es decir, seccionalmente continua en $t \geq 0$, de crecimiento a lo sumo exponencial y que vale 0 en $t < 0$. Consideramos la variable compleja $z = s + i\omega$ y para un s bastante grande se tiene

$$\mathcal{L}(f)(z) = \int_0^\infty f(t) e^{-zt} dt = \int_{-\infty}^\infty [f(t) e^{-s t}] e^{-i\omega t} dt = \mathcal{F}(f(t) e^{-s t})(\omega)$$

Si $f(t)$ es continua en t con derivadas laterales, lo cual es cierto en particular para cada $t < 0$, vale

$$f(t) e^{-s t} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \mathcal{F}(f(\tau) e^{-s \tau})(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$f(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \mathcal{L}(f)(s + i\omega) e^{s t} e^{i\omega t} d\omega$$

$$f(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \mathcal{L}(f)(s + i\omega) e^{s t} e^{i\omega t} d\omega$$

Considerando el segmento vertical $[s - iM, s + iM]$ parametrizado por $z = s + i\omega$, $-M \leq \omega \leq M$, con $dz = i d\omega$, la integral anterior se escribe como una integral compleja:

$$f(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{s-iM}^{s+iM} \mathcal{L}(f)(z) e^{z t} dz$$

Esta es la fórmula de inversión de la Transformada de Laplace.

Corolario

Si $\mathcal{L}(f) = 0$ entonces $f(t) = 0$ es decir el núcleo $N(\mathcal{L}) = \{0\}$.

Por lo tanto, si para una función $F(s)$ encontramos una $f(t)$ en \mathcal{F}_e con $\mathcal{L}(f(t)) = F$, tal $f(t)$ es la única.

Ejemplo

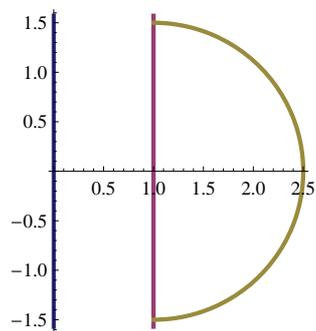
Sea $F(s) = \frac{e^{-2s}}{1+s^2}$ y busquemos su antitransformada de Laplace $f(t)$.

Definimos $f(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{s-iM}^{s+iM} \frac{e^{-2z}}{1+z^2} e^{z t} dz = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{1-iM}^{1+iM} \frac{e^{(t-2)z}}{1+z^2} dz$ eligiendo $s = 1$.

Calculamos la integral por residuos tomando el semicírculo de diámetro $[1 - iM, 1 + iM]$, hacia la izquierda si $t > 2$ y hacia la derecha si $t < 2$. Esto asegura la convergencia a cero de la integral sobre el correspondiente semicírculo para $M \rightarrow \infty$.

a) Para $t < 2$ la integral vale cero ya que el semicírculo hacia la derecha no encierra singularidades.

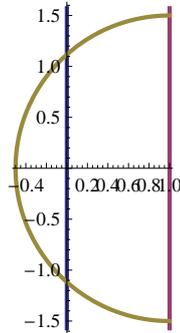
```
ParametricPlot[{{0, ω}, {1, ω}, {1 + 1.5 Cos[ω], 1.5 Sin[ω]}}, {ω, -π/2, π/2},
  AspectRatio → Automatic, PlotStyle → {Thick}]
```



b) Para $t > 2$ el valor es $\frac{1}{2\pi i} 2\pi i \{\text{Res}_{z=i} + \text{Res}_{z=-i}\} = \frac{1}{2i} e^{i(-2+t)} - \frac{1}{2i} e^{-i(-2+i)} = \text{sen}(t - 2)$

Luego $u(t - 2) \text{sen}(t - 2)$ es la única función que tiene por transformada de Laplace $\frac{e^{-2s}}{1 + s^2}$.

```
ParametricPlot[{{0, ω}, {1, ω}, {1 - 1.5 Cos[ω], 1.5 Sin[ω]}}, {ω, -π/2, π/2},
  AspectRatio -> Automatic, PlotStyle -> {Thick}]
```



Ejercicio

Aplicando la fórmula de inversión hallar la antitransformada de Laplace de $\frac{s}{s^2 + s + 1}$.

Análisis del espectro

Para una función $f(t)$ absolutamente integrable la Transformada de Fourier es una función de la frecuencia ω y toma valores complejos:

$$\hat{f}(\omega) = A(\omega) e^{i\varphi(\omega)} \quad \text{donde} \quad |\hat{f}(\omega)| = A(\omega) \quad \text{y} \quad \varphi(\omega) = \arg \hat{f}(\omega)$$

El número positivo $A(\omega)$ mide la intensidad del armónico $e^{i\omega t} \Delta\omega$ y $\varphi(\omega)$ es el argumento que verifica: $-\pi < \varphi(\omega) \leq \pi$ y representa la fase del armónico, que puede ser adelante si $\varphi(\omega) > 0$ o atraso si $\varphi(\omega) < 0$.

Se puede graficar $\hat{f}(\omega)$ como una curva del plano complejo. Ello permite observar la variación de $A(\omega)$ y de $\varphi(\omega)$ al variar la frecuencia ω . Según el teorema 3 es una curva continua y por el teorema 4 para $\omega \rightarrow \pm\infty$ la curva se acerca al origen: $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\omega) = 0$. Además si $f(t)$ es real será $\hat{f}(-\omega) = \overline{\hat{f}(\omega)}$ y la curva es simétrica respecto del eje horizontal.

Ejemplo 1

$$\hat{e}(\omega) = \frac{1}{-i\omega} [e^{-i\omega} - 1] = \frac{\text{sen } \omega + i(\cos \omega - 1)}{\omega}$$

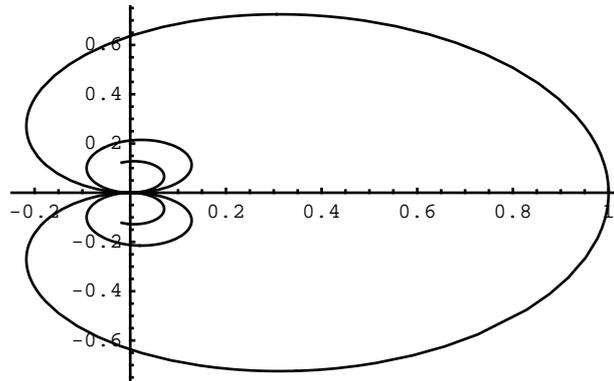
Se ve que es continua y que $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \hat{e}(\omega) = 0$, $\hat{e}(0) = 1$ y para cada ω es $\hat{e}(\omega) \neq 0$.

Corta al eje horizontal para $\omega = 2k\pi$ es el punto real $\frac{1}{2k\pi}$.

Para $\omega = 2k\pi > 0$ es $\text{Im}(\omega^-) < 0$ y por lo tanto corta el eje de abajo hacia arriba.

En cambio, para $\omega = 2k\pi < 0$ es $\text{Im}(\omega^-) > 0$ y por lo tanto corta el eje de arriba hacia abajo.

```
ParametricPlot[{Sin[ω], Cos[ω] - 1}, {ω, -16, 16}, PlotRange -> All];
```

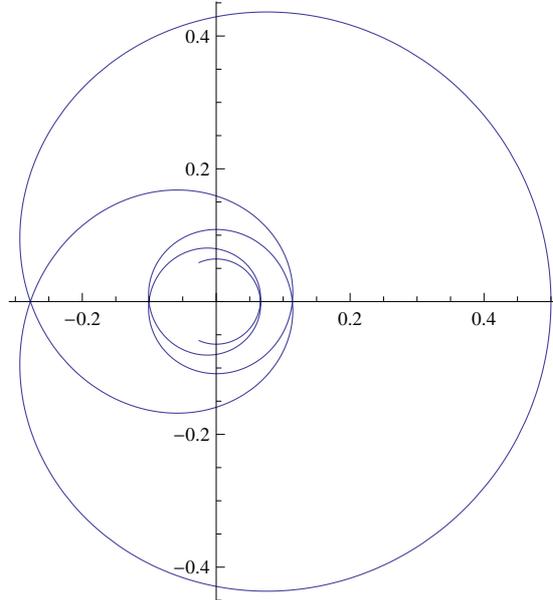


Con este gráfico se puede entender $A(\omega)$ y $\varphi(\omega)$.

Ejemplo 2

Para $g(t) = t e(t)$ la transformada es $\hat{g}(\omega) = \frac{-1 + e^{-i\omega} + i\omega e^{-i\omega}}{\omega^2} = \frac{-1 + \cos[\omega] + \omega \sin[\omega]}{\omega^2} + i \frac{-\sin[\omega] + \omega \cos[\omega]}{\omega^2}$

```
ParametricPlot[{{ $\frac{-1 + \text{Cos}[\omega] + \omega \text{Sin}[\omega]}{\omega^2}$ ,  $\frac{-\text{Sin}[\omega] + \omega \text{Cos}[\omega]}{\omega^2}$ },
{ $\omega$ , -16, 16}, PlotRange -> All]
```

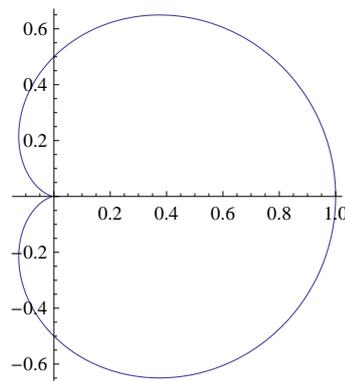


Ejemplo 3

Sea $h(t) = \begin{cases} t e^{-t} & \text{para } t > 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$ cuya transformada es $\hat{h}(\omega) = \frac{1 - \omega^2 - 2i\omega}{(1 + \omega^2)^2}$

La gráfica correspondiente es

```
ParametricPlot[{{ $\frac{1 - \omega^2}{(1 + \omega^2)^2}$ ,  $-\frac{2\omega}{(1 + \omega^2)^2}$ }, { $\omega$ , -10, 10}, PlotRange -> All]
```



Parece una cardiode y efectivamente lo es.

Una cardiode tiene ecuación polar $r(\theta) = a(1 + \cos \theta)$ y ecuación cartesiana $(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$.

Se comprueba que $\left(\frac{1 - \omega^2}{(1 + \omega^2)^2}, -\frac{2\omega}{(1 + \omega^2)^2}\right)$ es una parametrización de la cardiode con $a = \frac{1}{2}$

Lo hacemos con el programa.

$$\mathbf{x} = \frac{1 - \omega^2}{(1 + \omega^2)^2}; \mathbf{y} = -\frac{2\omega}{(1 + \omega^2)^2};$$

$$\left(\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 - \frac{1}{2} \mathbf{x} \right)^2 - \frac{1}{4} (\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2) // \text{Simplify}$$

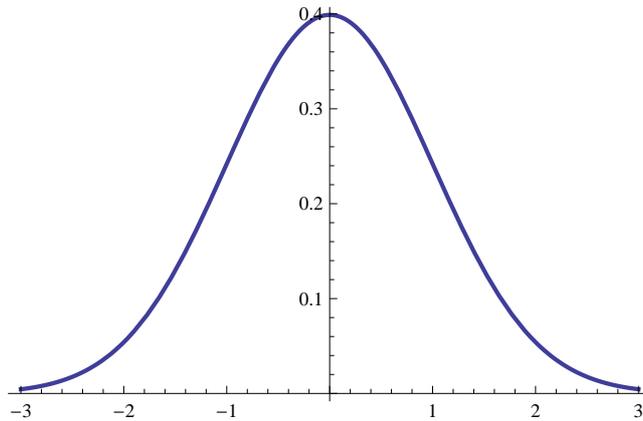
0

Transformada de la Gaussiana

En la unidad 3 se demostró que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \sqrt{2\pi}$

Sea $g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$ la Gaussiana normalizada.

`Plot` $\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}, \{t, -3, 3\}, \text{PlotStyle} \rightarrow \{\text{Thick}\} \right]$



Para hallar la transformada de Fourier aplicamos el Teorema de Cauchy a la función analítica $e^{-\frac{1}{2}z^2}$ en el rectángulo

$$R_M(\omega) = [-M, M] \times [0, i\omega]$$

y obtenemos $\int_{\partial R_M} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0$. La calculamos en los cuatro tramos orientados

$$\begin{aligned} z_1(t) &= t, & -M \leq t \leq M \\ z_2(t) &= t + i\omega, & -M \leq t \leq M \text{ con signo negativo} \\ z_3(t) &= -M + it, & 0 \leq t \leq \omega \text{ con signo negativo} \\ z_4(t) &= M + it, & 0 \leq t \leq \omega \end{aligned}$$

En primer lugar fácilmente se comprueba que las integrales en los tramos verticales tienden a 0 para $M \rightarrow \infty$. Y quedan los dos tramos horizontales que dan:

$$\int_{\partial_1} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \int_{-M}^M e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \sqrt{2\pi} \text{ para } M \rightarrow \infty$$

$$\int_{\partial_2} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = -\int_{-M}^M e^{-\frac{1}{2}t^2 - it\omega + \frac{1}{2}\omega^2} dt = -e^{\frac{1}{2}\omega^2} \int_{-M}^M e^{-\frac{1}{2}t^2} e^{-i\omega t} dt$$

Luego en el límite para $M \rightarrow \infty$ obtenemos

$$\hat{g}(\omega) = e^{-\frac{1}{2}\omega^2} = \sqrt{2\pi} g(\omega)$$

En otras palabras, la transformada de la Gaussiana es otra Gaussiana.

Dicho de otra manera: la Gaussiana es una autofunción de la transformada de Fourier con autovalor $\sqrt{2\pi}$.

Ejercicio

a) Comprobar la fórmula de inversión para la Gaussiana.

b) Sea $g_\sigma(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{t^2}{\sigma^2}}$, $\sigma > 0$.

Comprobar que si σ es pequeño la gráfica es esbelta y si σ es grande la gráfica se aplasta.

Probar que $\int_{-\infty}^{\infty} g_\sigma(t) dt = 1$ y $\hat{g}_\sigma(\omega) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2}$

Concluir que si $g_\sigma(t)$ es esbelta entonces $\hat{g}_\sigma(\omega)$ se aplasta y recíprocamente.

Este es el "principio de incertidumbre" en la teoría de Fourier, análogo al de Heisenberg en la mecánica cuántica.

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Todas las funciones serán seccionalmente continuas y absolutamente integrables.

F1. Linealidad.

$$\mathcal{F}(c_1 f_1 + c_2 f_2)(\omega) = c_1 \mathcal{F}(f_1)(\omega) + c_2 \mathcal{F}(f_2)(\omega)$$

Demostración

Es consecuencia de la linealidad de la integración.

q.e.d.

F2. Derivadas.

a) Si $f(t)$ es continua y $f'(t)$ es seccionalmente continua y ambas son absolutamente integrables entonces

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = i\omega \mathcal{F}(f)(\omega)$$

b) Si $f(t)$ y $t f(t)$ son seccionalmente continuas y absolutamente integrables entonces

$$\mathcal{F}(t f(t))(\omega) = i \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}(f)(\omega)$$

Demostración

a) Veamos primero que bajo las hipótesis se tiene $\lim_{t \rightarrow \pm \infty} f(t) = 0$

En efecto, $|f(t) - f(t')| = \left| \int_t^{t'} f(\tau) d\tau \right| \leq \int_t^{t'} |f(\tau)| d\tau \leq \int_t^{+\infty} |f(\tau)| d\tau$. Pero dado un $\epsilon > 0$ existe $M > 0$ tal que si $t > M$ es $\int_t^{+\infty} |f(\tau)| d\tau < \epsilon$. Luego para $t, t' > M$ es $|f(t) - f(t')| < \epsilon$. Ello implica que existe el límite finito $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$. Y como la integral $\int_0^{+\infty} |f(\tau)| d\tau$ es convergente necesariamente ese límite es cero. De manera análoga se obtiene $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0$. Por lo tanto también vale $\lim_{t \rightarrow \pm \infty} f(t) e^{-i\omega t} = 0$.

Integrando por partes se obtiene

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-i\omega t} dt = [f(t) e^{-i\omega t}]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (-i\omega) e^{-i\omega t} dt = i\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

b) En las hipótesis enunciadas se puede demostrar que $\mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$ es derivable y que derivando bajo el signo de integral se obtiene la derivada

$$\frac{d}{d\omega} \mathcal{F}(f)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\omega} [f(t) e^{-i\omega t}] dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (-it) e^{-i\omega t} dt = \mathcal{F}(-it f(t))(\omega)$$

q.e.d.

Ejemplos

a) $\mathcal{F}(\Lambda')(\omega) = i\omega \mathcal{F}(\Lambda)(\omega) = i\omega 2 \frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} = 2i \frac{1 - \cos \omega}{\omega}$

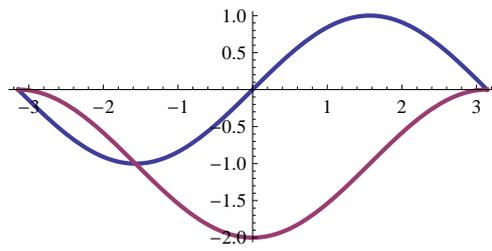
b) $\mathcal{F}(te(t))(\omega) = i \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}(e(t)) = i \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1 - e^{-i\omega}}{\omega} \right) = \frac{e^{-i\omega}(1 + i\omega) - 1}{\omega^2}$

Ejemplo

Sea $f(t) = \prod_{[-\pi, \pi]}(t) \sin t$ y $F(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = -\prod_{[-\pi, \pi]}(t) (1 + \cos t)$

Verificar que $F'(t) = f(t)$. Graficamos ambas funciones.

```
Plot[{Sin[t], -(1 + Cos[t])}, {t, -π, π}, AspectRatio -> Automatic, PlotStyle -> {Thick}]
```



Se tiene

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t e^{-i\omega t} dt = -2i \int_0^{\pi} \sin t \sin \omega t dt = -i \int_0^{\pi} [\cos t(1 - \omega) - \cos t(1 + \omega)] dt = \dots = 2i \frac{\sin \pi \omega}{\omega^2 - 1}$$

$$\hat{F}(\omega) = - \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos t) e^{-i\omega t} dt = -2 \int_0^{\pi} (1 + \cos t) \cos \omega t dt =$$

$$-2 \int_0^{\pi} \cos \omega t dt - \int_0^{\pi} [\cos t(1 - \omega) + \cos t(1 + \omega)] dt = 2 \frac{\sin \pi \omega}{\omega(\omega^2 - 1)}$$

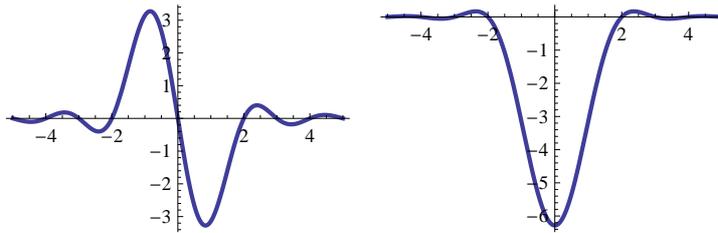
Luego $i \omega \hat{F}(\omega) = 2i \frac{\sin \pi \omega}{\omega^2 - 1} = \hat{f}(\omega)$

A continuación graficamos $-i \hat{f}(\omega) = 2 \frac{\sin \pi \omega}{\omega^2 - 1}$ y $\hat{F}(\omega) = 2 \frac{\sin \pi \omega}{\omega(\omega^2 - 1)}$

```

g1 = Plot[2  $\frac{\text{Sin}[\pi \omega]}{\omega^2 - 1}$ , {\omega, -5, 5},
PlotRange -> All, AspectRatio -> Automatic, PlotStyle -> {Thick}];
g2 = Plot[2  $\frac{\text{Sin}[\pi \omega]}{\omega (\omega^2 - 1)}$ , {\omega, -5, 5}, PlotRange -> All,
AspectRatio -> Automatic, PlotStyle -> {Thick}];
GraphicsGrid[{{g1, g2}}]

```



Ejercicio

Sea $f(t) = \Lambda(t + 1) - \Lambda(t - 1)$ y $F(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$

- a) Graficar ambas funciones y notar que $F'(t) = f(t)$.
- b) Calcular $\hat{f}(\omega)$ y $\hat{F}(\omega)$ y graficarlas. Comprobar que $\hat{f}(t) = i\omega \hat{F}(\omega)$.

Ejercicio

Sea $f(t) = t e^{-at} u(t)$ con $a > 0$. Comprobar las igualdades

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = i\omega \mathcal{F}(f)(\omega) \quad \mathcal{F}(t f(t))(\omega) = i \frac{d}{d\omega} \mathcal{F}(f)(\omega)$$

Ejercicio

a) Probar que para cada natural n es $\mathcal{F}(t^n e^{-at} u(t))(\omega) = \frac{n!}{(a + i\omega)^{n+1}}$ ($a > 0$)

b) Idem que $\mathcal{F}(t^n e^{bt} u(-t))(\omega) = \frac{(-1)^n n!}{(b - i\omega)^{n+1}}$ ($b > 0$)

Ecuaciones lineales

Estas dos propiedades permiten resolver las ecuaciones diferenciales lineales $\mathcal{L}(x) = \mathcal{M}(f(t))$

Transformando Fourier queda $p(i\omega)\hat{x}(\omega) = q(i\omega)\hat{f}(\omega)$ y despejando $\hat{x}(\omega) = \frac{q(i\omega)}{p(i\omega)}\hat{f}(\omega) = H(i\omega)\hat{f}(\omega)$

Antitransformando obtenemos la solución.

Ejemplo Para $2x' + x = e^{-t}$ queda

$$\hat{x}(\omega) = \frac{2}{(2i\omega + 1)(1 + \omega^2)} = \frac{1}{\left(i\omega + \frac{1}{2}\right)(1 - i\omega)(1 + i\omega)} = \frac{4}{3\left(i\omega + \frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{3(1 - i\omega)} - \frac{1}{(1 + i\omega)}$$

y antitransformando obtenemos $x(t) = \frac{4}{3}e^{-\frac{1}{2}t}u(t) + \frac{1}{3}e^t u(-t) - e^{-t}u(t)$.

Ejercicio

Resolver las ecuaciones $x' + x = e^{2t}u(-t)$ y $x'' + 2x' + x = te^{-t}u(t)$

F3. Desplazamientos y cambio de escala.

i) $\mathcal{F}(f(t - t_0))(\omega) = e^{-it_0\omega} \mathcal{F}(f)(\omega)$

ii) $\mathcal{F}(f)(\omega - \omega_0) = \mathcal{F}[e^{i\omega_0 t} f(t)](\omega)$

iii) $\mathcal{F}(f(ct))(\omega) = \frac{1}{|c|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{c}\right)$

Demostración

A cargo del lector.

Ejercicio

a) Hallar una fórmula para la transformada de $f(t)\cos(at)$ y $f(t)\sin(at)$

Ayuda: Utilizar la expresión exponencial para el seno y coseno y la propiedad b) anterior.

b) Calcular la transformada de $\int_{[0,\pi]} \sin t$ directamente y con la fórmula obtenida en a)

Rta: $\frac{1 + e^{-i\pi\omega}}{1 - \omega^2}$

c) Calcular la transformada de $\frac{\sin t}{t^2 + 1}$

Para $\sigma > 0$, y la gaussiana normalizada,

$$\mathcal{F}\left(g\left(\frac{t}{\sigma}\right)\right)(\omega) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{\sigma}\right)^2}\right)(\omega) = \sigma e^{-\frac{1}{2}(\sigma\omega)^2}$$

F4. Convoluciones.

En condiciones adecuadas valen

a) $\mathcal{F}(f * g)(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega) \cdot \mathcal{F}(g)(\omega)$

b) $\mathcal{F}(f(t)g(t))(\omega) = \frac{1}{2\pi} [\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)](\omega)$

Demostración

Sean $f(t)$ y $g(t)$ s.c y absolutamente integrables.

a) Se puede cambiar el orden de integración:

$$\mathcal{F}(f * g)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \right) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) e^{-i\omega t} dt \right) f(\tau) d\tau$$

Haciendo el cambio de variables $t - \tau = s$ en la integral interior queda

$$\mathcal{F}(f * g)(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(s) e^{-i\omega s} ds \right) f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \mathcal{F}(f)(\omega) \mathcal{F}(g)(\omega)$$

b) Aplicando la fórmula de inversión para $f(t)$, que vale en los puntos de derivabilidad, e invirtiendo el orden de integración:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(t)g(t))(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\sigma) e^{it\sigma} d\sigma \right) g(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\sigma) \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{it(\sigma-\omega)} dt \right) d\sigma = \frac{1}{2\pi} (\hat{f} * \hat{g})(\omega) \end{aligned}$$

Este cálculo impone restricciones que se deben tener en cuenta.

q.e.d.

Ejemplo

La función Λ' es real e impar y por ello $\Lambda' * \Lambda'$ es real y par.
Luego su transformada de Fourier es real y par

$$\mathcal{F}(\Lambda' * \Lambda')(\omega) = \left(2i \frac{1 - \cos \omega}{\omega}\right)^2 = -4 \frac{(1 - \cos \omega)^2}{\omega^2}$$

Ejercicio

Se tiene $\Lambda(t-1) = e * e$.

Comprobar que $\mathcal{F}(\Lambda(t-1)) = \mathcal{F}(e)^2$

Ejercicio

Comprobar la igualdad dada en b) para $f(t) = e^{-at} u(t)$ y $g(t) = e^{bt} u(-t)$ con $a > 0$, $b > 0$.

Ejercicio

- Resolver la ecuación $x * e^t u(-t) = t e^{-t} u(t)$
- Comprobar la solución obtenida.

Ejercicio

Usando transformada de Fourier probar que la convolución de dos gaussianas es otra gaussiana:

$$g_{\mu_1, \sigma_1}(t) * g_{\mu_2, \sigma_2}(t) = g_{\mu, \sigma}(t) \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \mu_1 + \mu_2 = \mu \\ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \sigma^2 \end{cases}$$

Este resultado implica, en la teoría de probabilidades, que la suma de variables aleatorias normales e independientes es normal.

Funciones de cuadrado integrable. Igualdad de Parseval.

Consideremos funciones absolutamente integrables y de cuadrado integrable:

$$E = \left\{ f(t) : \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty, \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

Demostraremos que E es un espacio vectorial con un producto escalar.

a) Sean f, g funciones en E .

De la desigualdad triangular $|f + g| \leq |f| + |g|$ resulta que $f + g$ es absolutamente integrable. Además se tiene

$$0 \leq (|f| - |g|)^2 = |f|^2 - 2|f||g| + |g|^2$$

y por lo tanto $|f||g| \leq \frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2)$

Luego $f \cdot g$ es absolutamente integrable. Se tiene además la desigualdad

$$|f + g|^2 = (f + g)(\overline{f + g}) = |f|^2 + f\overline{g} + \overline{f}g + |g|^2 \leq |f|^2 + 2|f||g| + |g|^2$$

que prueba que $f + g$ es a cuadrado integrable.

Es inmediato si α es un número entonces αf también está en E .

b) Se tiene el producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt$$

Esta integral es absolutamente convergente pues según vimos $|f(t)g(t)| \leq \frac{1}{2}(|f(t)|^2 + |g(t)|^2)$.

La Transformada de Fourier está definida en las funciones de E y se puede demostrar que la transformada es de cuadrado integrable.

F5. Igualdad de Parseval.

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

En particular

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$$

Demostración

Se tiene $\hat{\overline{g}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(t)} e^{-i\omega t} dt = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{i\omega t} dt} = \overline{\hat{g}(-\omega)}$

Aplicando la fórmula de convolución dada en F4 b a la función $f(t), \bar{g}(t)$ en $\omega = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{g(t)} dt &= \mathcal{F}(f(t) \bar{g}(t))(0) = \frac{1}{2\pi} (\hat{f} * \hat{g})(0) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\sigma) \hat{g}(0 - \sigma) d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\sigma) \overline{\hat{g}(\sigma)} d\sigma \end{aligned}$$

q.e.d.

Ejemplo

Para la función $e(t)$ se tiene $e^2(t) = e(t)$ y $\hat{e}(\omega) = \frac{1-e^{-i\omega}}{i\omega}$ por lo tanto

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-i\omega}}{i\omega} \frac{1-e^{i\omega}}{-i\omega} d\omega \text{ y por la fórmula de Parseval queda } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos \omega}{\omega^2} d\omega = \pi$$

Ejercicio

Comprobar la igualdad de Parseval para las funciones $f(t) = e^{-t} u(t)$ y $g(t) = e(t)$

$$\text{y también para } f(t) = e^{-|t|} \text{ y } g(t) = e\left(t + \frac{1}{2}\right)$$

Ejercicio

Utilizando la igualdad de Parseval para $\Pi_{[-c, c]}(t)$ y $\Pi_{[-d, d]}(t)$ con $0 < c \leq d$ demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos at - \cos bt}{t^2} dt = \pi (|b| - |a|)$$

Ejercicio

Utilizando la igualdad de Parseval en las funciones $\Pi_{[-a, a]}(t)$ y $e^{-b|t|}$, $a > 0$, $b > 0$, mostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} at}{t(t^2 + b^2)} dt = \frac{\pi}{b^2} (1 - e^{-ab})$$

Ejercicio

Probar que usando la igualdad de Parseval que $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t} e^{-|t|} dt = \frac{\pi}{2}$

Ejercicio

Probar usando la igualdad de Parseval que $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)^2 dt = \pi$

Para la función constante 1 o el escalón unitario $u(t)$, la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$ carece de sentido.

Dichas funciones las consideraremos como funciones generalizadas, y trataremos de definir la transformada de Fourier de funciones generalizadas.

La posibilidad surge de la siguiente observación. La fórmula de Parseval aplicada a $f(t)$ seccionalmente continua y absolutamente integrable y a una función de prueba $\psi(t)$ es

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{\psi}(\omega)} d\omega$$

Si escribimos $\varphi(\omega) = \overline{\hat{\psi}(\omega)}$, de la igualdad $\psi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\psi}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$, resulta

$$\overline{\psi(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{\psi}(\omega)} e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) e^{-i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \hat{\varphi}(t)$$

y por lo tanto la igualdad de Parseval se escribe

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \hat{\varphi}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \varphi(\omega) d\omega$$

Esta igualdad sugiere la idea de definir la transformada de Fourier de una función generalizada mediante la igualdad $\hat{F}(\varphi) := F(\hat{\varphi})$, pero hay un inconveniente, que es el siguiente. Una función de prueba $\varphi(t)$ tiene infinitas derivadas y soporte compacto, y por la propiedad F2, su transformada $\hat{\varphi}(\omega)$ tiene infinitas derivadas pero no tiene soporte compacto lo cual en principio impide evaluar $F(\hat{\varphi})$. Pero, tanto $\hat{\varphi}(\omega)$ como sus derivadas, verifican, por la propiedad de Riemann-Lebesgue y F2, $\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} \omega^n \hat{\varphi}(\omega) = 0$ para cada $n \geq 0$, lo cual, significa que decrece a cero más rápido que el inverso de cualquier polinomio y, muchas funciones generalizadas F actúan sobre funciones con esta propiedad. Por ello, definimos un nuevo espacio vectorial de funciones de prueba de funciones de decrecimiento rápido en infinito:

$$\mathcal{S} = \{ \varphi(t) : \varphi(t) \text{ tiene infinitas derivadas } \wedge \lim_{t \rightarrow \pm\infty} t^n \varphi^{(k)}(t) = 0 \text{ para cada } n \geq 0 \text{ y cada } k \geq 0 \}$$

También se lo conoce como espacio de Schwartz, en honor a Laurent Schwartz, el creador de la teoría de funciones generalizadas.

Naturalmente las funciones muy buenas $\mathcal{D}_0^{(\infty)}$ forman un subespacio de \mathcal{S}

La gaussiana $g_\sigma(t - t_0)$ pertenece a \mathcal{S} y también $p(t) g_\sigma(t - t_0)$ para cada polinomio $p(t)$.

Por las propiedades F1, F2 y Riemann-Lebesgue, la transformada de Fourier define un isomorfismo de $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$.

Funciones generalizadas temperadas

Una función generalizada F se dice **temperada** si está definida en \mathcal{S} .

Es claro que forman un subespacio vectorial de las funciones generalizadas y que la derivada de una función generalizada temperada es temperada. Para una función generalizada temperada $F(t)$ definimos su transformada de Fourier mediante

$$\hat{F}(\varphi) := F(\hat{\varphi}).$$

Resulta por lo dicho que \hat{F} es también una función generalizada temperada.

a) Veamos que esta definición coincide, sobre funciones, con la transformada de Fourier usual.

En efecto, si $f(t)$ es seccionalmente continua y absolutamente integrable, sabemos que tiene transformada de Fourier, y por lo demostrado más arriba

$$\hat{F}_f(\varphi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \hat{\varphi}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \varphi(\omega) d\omega = F_{\hat{f}}(\varphi)$$

Por lo tanto

$$\hat{F}_f = F_{\hat{f}}$$

b) Si $f(t)$ es una función s.c. y de crecimiento a lo sumo potencial, es decir, $|f(t)| \leq k |t|^n$, y $F(t)$ es temperada entonces F_f y $f(t)F(t)$ son temperadas.

c) Para calcular la transformada de algunas $F(t)$ temperadas emplearemos el siguiente procedimiento.

Si podemos aproximar F por funciones seccionalmente continuas y absolutamente integrables $f_\alpha(t)$:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} f_\alpha(t) = F(t) \quad , \text{ es decir, para cada } \varphi(t) \in \mathcal{S} : \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(t) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \varphi(t) dt$$

entonces, $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \hat{f}_\alpha(\omega) = \hat{F}(\omega)$ en el sentido de las funciones generalizadas.

En efecto, por lo demostrado en a), se tiene

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \hat{F}_{f_\alpha}(\varphi) = \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(t) \hat{\varphi}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \hat{\varphi}(t) dt = \hat{F}(\varphi)$$

d) De las igualdades $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(t) \varphi(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(\omega) \hat{\varphi}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \hat{\varphi}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) 2\pi \varphi(-t) dt$, resulta la regla práctica

$$\hat{F}(\omega) = G(\omega) \quad \Rightarrow \quad \hat{G}(\omega) = 2\pi F(-\omega)$$

La transformada de Fourier define un isomorfismo entre las funciones generalizadas temperadas.

Ejemplos

i) La función generalizada asociada a la exponencial $f(t) = e^t$ no es temperada.

En efecto, si $g(t) = e^{-\frac{1}{t}} u(t)$, la función $\varphi(t) = g(t) e^{-t}$ pertenece a \mathcal{S} y como $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) e^t = 1$, la función $\varphi(t) e^t$ no es integrable.

ii) De la misma manera se ve que si α es un número con $\text{Re}(\alpha) \neq 0$, la exponencial $e^{\alpha t}$ no es temperada. Por ejemplo, las soluciones de una ecuación homogénea estable no son temperadas, excepto la nula.

iii) Si $p(t)$ es un polinomio, α un número complejo con $\text{Re}(\alpha) < 0$ entonces $p(t) e^{\alpha t} u(t)$ es temperada, y si $\text{Re}(\alpha) > 0$ entonces $p(t) e^{\alpha t} u(-t)$ es temperada.

iv) $\delta(t)$ y $p v(\frac{1}{t})$ son temperadas.

Propiedades

Veamos que las propiedades de la Transformada de Fourier se extienden automáticamente a funciones generalizadas.

F1 Linealidad

Es inmediata.

F2 Derivadas

$$a) \mathcal{F}(F')(\varphi) = F'(\hat{\varphi}) = -F(\hat{\varphi}') = -F(-i\mathcal{F}(\omega\varphi(\omega))(t)) = i\hat{F}(\omega\varphi(\omega)) = (i\omega\hat{F})(\varphi)$$

por lo tanto
$$\mathcal{F}(F') = i\omega\hat{F}$$

$$b) \mathcal{F}(tF)(\varphi) = (tF)(\hat{\varphi}) = F(t\hat{\varphi}) = -iF(\mathcal{F}(\varphi')) = -i\hat{F}(\varphi') = i\hat{F}'(\varphi)$$

por lo tanto
$$\mathcal{F}(tF) = i\hat{F}'$$

F3 Desplazamientos y cambio de escala.

$$a) \hat{\varphi}(t + \alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) e^{-i\omega(t+\alpha)} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-i\alpha\omega} \varphi(\omega)) e^{-i\omega t} d\omega = \mathcal{F}(e^{-i\alpha\omega} \varphi) \text{ y por lo tanto}$$

$$\mathcal{F}(F(t - a))(\varphi) = F(t - a)(\hat{\varphi}) = F(\hat{\varphi}(t + \alpha)) = F(\mathcal{F}(e^{-i\alpha\omega} \varphi)) = \hat{F}(e^{-i\alpha\omega} \varphi) = (e^{-i\alpha\omega} \hat{F})(\varphi)$$

y entonces $\mathcal{F}(F(t-a))(\varphi) = e^{-i\alpha\omega} \hat{F}$

$$b) \quad \mathcal{F}(\varphi(\omega + \alpha)) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega + \alpha) e^{-i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\rho) e^{-i t(\rho - \alpha)} d\rho = e^{i t \alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\rho) e^{-i t \rho} d\rho = e^{i t \alpha} \hat{\varphi}(t)$$

y por ello

$$\hat{F}(\omega - a)(\varphi) = \hat{F}(\varphi(\omega + \alpha)) = F(\mathcal{F}(\varphi(\omega + \alpha))) = F(e^{i\alpha t} \hat{\varphi}) = (e^{i\alpha\omega} F)(\hat{\varphi}) = \mathcal{F}(e^{i\alpha\omega} F)(\varphi)$$

Luego

$$\hat{F}(\omega - a) = \mathcal{F}(e^{i\alpha\omega} F)$$

c) Cambio de escala

Se tiene $\int_{-\infty}^{\infty} F(t) \varphi(\alpha t) dt = \frac{1}{|\alpha|} \int_{-\infty}^{\infty} F\left(\frac{t}{\alpha}\right) \varphi(t) dt$ y entonces

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(F(ct))(\omega) \varphi(\omega) d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} F(ct) \hat{\varphi}(t) dt = \frac{1}{|c|} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \hat{\varphi}\left(\frac{t}{c}\right) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \mathcal{F}(\varphi(c\omega))(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(\omega) \varphi(c\omega) d\omega = \frac{1}{|c|} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}\left(\frac{\omega}{c}\right) \varphi(\omega) d\omega \end{aligned}$$

Luego

$$\mathcal{F}(F(ct))(\omega) = \frac{1}{|c|} \hat{F}\left(\frac{\omega}{c}\right)$$

F4. Convoluciones

a) Se tiene

$$(\hat{F} \hat{f})(\varphi) = \hat{F}(\hat{f} \varphi) = F(\mathcal{F}(\hat{f} \varphi)) = F\left(\frac{1}{2\pi} \hat{f} * \hat{\varphi}\right) = F\left(\frac{1}{2\pi} 2\pi \tilde{f} * \hat{\varphi}\right) = F(\tilde{f} * \hat{\varphi}) = (F * f)(\hat{\varphi}) = \mathcal{F}(F * f)(\varphi)$$

y por lo tanto

$$\mathcal{F}(F * f) = \hat{F} \hat{f}$$

b) Se tiene $\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{-it\omega} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(-\omega) e^{-it\omega} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\rho) e^{it\rho} d\rho = 2\pi f(t)$ y entonces

$$\text{y } \left(\frac{1}{2\pi} \hat{F} * \hat{f}\right)(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \hat{F}(\tilde{f} * \varphi) = \frac{1}{2\pi} F\left(\mathcal{F}(\tilde{f} * \varphi)\right) = \frac{1}{2\pi} F\left(\tilde{f} \hat{\varphi}\right) = \frac{1}{2\pi} F(2\pi f \hat{\varphi}) = (F f)(\hat{\varphi}) = \mathcal{F}(F f)(\varphi)$$

por lo tanto

$$\mathcal{F}(F f) = \frac{1}{2\pi} \hat{F} * \hat{f}$$

F5. Igualdad de Parseval Se tiene $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\hat{f}(\tau)} e^{-i\omega\tau} d\tau = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{i\omega t} dt} = 2\pi \overline{f(\omega)}$

$$\text{y } \frac{1}{2\pi} \hat{F}(\overline{\hat{f}}) = \frac{1}{2\pi} F(\hat{f}) = \frac{1}{2\pi} F(2\pi \overline{f}) = F(\overline{f})$$

por lo tanto

$$F(\overline{f}) = \frac{1}{2\pi} \hat{F}(\overline{\hat{f}})$$

Transformada de Fourier de algunas funciones generalizadas

1. Transformada de Fourier del impulso unitario.

i) Directamente.

Se tiene

$$\hat{\delta}(\varphi) := \delta(\hat{\varphi}) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \hat{\varphi}(t) dt = \hat{\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) d\omega \quad \text{y por lo tanto } \hat{\delta}(\omega) = 1$$

También se podría obtener operacionalmente así: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-i\omega t} dt = 1$

Este resultado nos dice, en particular, que se necesitan todas las frecuencias para reconstruir armónicamente $\delta(t)$.

Haciendo un cambio de escala

$$\mathcal{F}(\delta(ct))(\omega) = \frac{1}{|c|} \hat{\delta}\left(\frac{\omega}{c}\right) = \frac{1}{|c|}$$

ii) Aplicando el esquema de aproximación.

Se tiene la aproximación ya demostrada

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin Mt}{t} = \delta(t)$$

y la transformada de $\frac{1}{\pi} \frac{\sin Mt}{t}$ es $\Pi_{[-M, M]}(\omega)$. Claramente $\lim_{M \rightarrow \infty} \Pi_{[-M, M]}(\omega) = 1$.

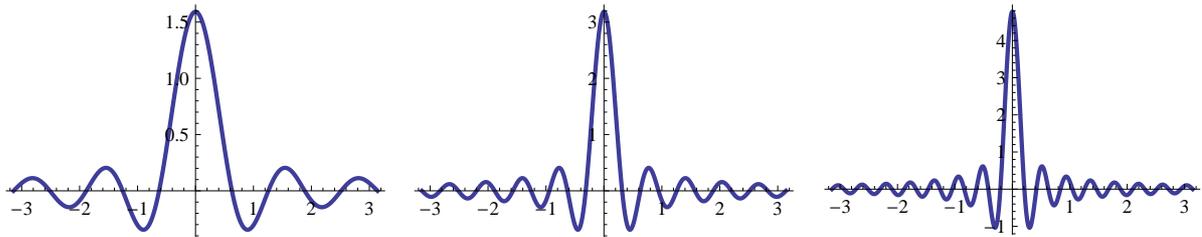
iii) Fórmula de inversión.

Comprobamos la fórmula de inversión:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \hat{\delta}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^M \cos \omega t d\omega = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin t M}{t} = \delta(t)$$

Graficamos esta aproximación.

```
M = 5; g1 = Plot[ $\frac{\text{Sin}[t M]}{\pi t}$ , {t, - $\pi$ ,  $\pi$ }, PlotRange -> All, PlotStyle -> {Thick}];
M = 10; g2 = Plot[ $\frac{\text{Sin}[t M]}{\pi t}$ , {t, - $\pi$ ,  $\pi$ }, PlotRange -> All, PlotStyle -> {Thick}];
M = 15; g3 = Plot[ $\frac{\text{Sin}[t M]}{\pi t}$ , {t, - $\pi$ ,  $\pi$ }, PlotRange -> All, PlotStyle -> {Thick}];
GraphicsGrid[{{g1, g2, g3}}]
```



2. Transformada de Fourier de la función signo.

Transformamos la función signo $\text{sg}(t) = u(t) - u(-t)$

Una aproximación interesante es $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \text{sg}(t) e^{-\epsilon |t|}$.

La transformada de $\text{sg}(t) e^{-\epsilon |t|}$ es $\frac{-2i\omega}{\omega^2 + \epsilon^2}$ y por lo tanto $\hat{\text{sg}}(\omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{-2i\omega}{\omega^2 + \epsilon^2}$

Para calcular este límite tomamos una función de prueba $\varphi(\omega)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{\epsilon^2 + \omega^2} \varphi(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^0 \frac{\omega}{\epsilon^2 + \omega^2} \varphi(\omega) d\omega + \int_0^{\infty} \frac{\omega}{\epsilon^2 + \omega^2} \varphi(\omega) d\omega \quad (\text{haciendo } \rho = -\omega \text{ en la primera})$$

$$= -\int_0^{\infty} \frac{\rho}{\epsilon^2 + \rho^2} \varphi(-\rho) d\rho + \int_0^{\infty} \frac{\omega}{\epsilon^2 + \omega^2} \varphi(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} \frac{\omega}{\epsilon^2 + \omega^2} [\varphi(\omega) - \varphi(-\omega)] d\omega$$

Nuevamente obtenemos que el límite existe y vale

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{\epsilon^2 + \omega^2} \varphi(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} \frac{\varphi(\omega) - \varphi(-\omega)}{\omega} d\omega = \text{p.v.} \left(\frac{1}{\omega} \right) (\varphi)$$

Se tiene entonces

$$\hat{\text{sg}}(\omega) = \frac{2}{i\omega} \quad (\text{Valor principal})$$

Nos ocupamos ahora de comprobar la fórmula de inversión.

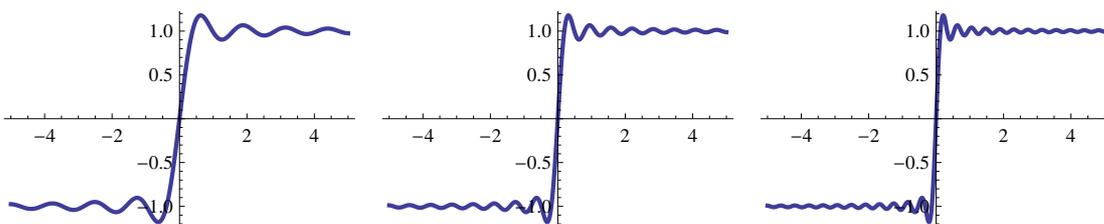
$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \hat{\text{sg}}(\omega) e^{i\omega t} d\omega &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{-i}{\pi} \text{p.v.} \int_{-M}^M \frac{1}{\omega} e^{i\omega t} d\omega \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \frac{2}{i} \int_0^M \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{\omega} d\omega = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^M \frac{\text{sen } \omega t}{\omega} d\omega = \text{sg}(t) \end{aligned}$$

Luego la función $\text{sg}(t)$ se aproxima por armónicos mediante la función seno-integral:

$$\text{sg}(t) = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^M \frac{\text{sen } \omega t}{\omega} d\omega = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^{M t} \frac{\text{sen } s}{s} ds = \frac{2}{\pi} \text{seni}[M t] \quad \text{para } t \neq 0$$

Veamos los gráficos de las aproximaciones para $M = 5, 10, 15$

```
g1 = Plot [ 2/π SinIntegral [5 t], {t, -5, 5}, PlotStyle -> {Thick} ];
g2 = Plot [ 2/π SinIntegral [10 t], {t, -5, 5}, PlotStyle -> {Thick} ];
g3 = Plot [ 2/π SinIntegral [15 t], {t, -5, 5}, PlotStyle -> {Thick} ];
GraphicsGrid [ { {g1, g2, g3} } ]
```



Observación

En las tablas de Transformadas de Fourier se suele encontrar $\hat{\text{sg}}(\omega) = \frac{2}{i\omega}$ aunque conviene poner valor principal cuando se trata de operar con ella, por ejemplo, para integrarla. Notemos que es imaginaria pura e impar lo cual se corresponde con que la función $\text{sg}(t)$ es real e impar.

3. Transformada de Fourier de la función constante 1.

Como $1 = e^{it \cdot 0}$, la función constante 1 es un armónico de frecuencia 0 y el espectro debería consistir únicamente de la frecuencia 0.

Varias aproximaciones importantes de la función 1 por funciones integrables, permiten hallar su transformada.

a) Se tiene la aproximación $f_M(t) = \prod_{[-M, M]}(t) : \lim_{M \rightarrow +\infty} f_M(t) = 1$

Fácilmente obtenemos $\hat{f}_M(\omega) = 2 \frac{\text{sen } M \omega}{\omega}$ y por un teorema anterior $\lim_{M \rightarrow \infty} 2 \frac{\text{sen } M \omega}{\omega} = 2 \pi \delta(\omega)$

Luego

$$\hat{1}(\omega) = 2 \pi \delta(\omega)$$

b) Se tiene la aproximación por exponenciales $1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} e^{-\epsilon |t|}$

Es fácil ver que

$$\mathcal{F}(e^{-\epsilon |t|})(\omega) = \frac{2\epsilon}{\epsilon^2 + \omega^2}$$

Probar que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\epsilon}{\epsilon^2 + \omega^2} \varphi(\omega) d\omega = 2\pi \varphi(0)$$

c) Sea finalmente la aproximación por gaussianas $1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} e^{-\epsilon t^2}$.

$$\mathcal{F}(e^{-\epsilon t^2})(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}} e^{-\frac{\omega^2}{4\epsilon}}$$

Probar que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{\epsilon}} e^{-\frac{\omega^2}{4\epsilon}} \varphi(\omega) d\omega = 2\pi \varphi(0)$$

Ejercicio

Establecer y comprobar la fórmula de inversión.

4. Transformada de Fourier del escalón unitario $u(t)$.

1) Observemos que $u(t) = \frac{1}{2}(1 + \text{sg}(t))$ y usando la linealidad de la transformada obtenemos:

$$\hat{u}(\omega) = \frac{1}{2} \left(\hat{1} + \hat{sg} \right) (\omega) = \frac{1}{2} \left[2 \pi \delta(\omega) - 2 i p \left(\frac{1}{\omega} \right) \right] = p v \left(\frac{1}{i \omega} \right) + \pi \delta(\omega)$$

2) Otra manera es aproximando $u(t)$ por la exponencial $e^{-\epsilon t} u(t)$, para $\epsilon \rightarrow 0^+$.

La transformada de Fourier de $e^{-\epsilon t} u(t)$ es $\frac{1}{\epsilon + i \omega}$.

Luego podemos escribir

$$\hat{u}(\omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\epsilon + i \omega}$$

Para calcular este límite sea $\varphi(\omega)$ una función de prueba de soporte compacto y supongamos que es cero para $|t| \geq a > 0$. Hallaremos el límite $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\omega)}{\epsilon + i \omega} d\omega$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\omega)}{\epsilon + i \omega} d\omega = \int_{-a}^0 \frac{\varphi(\omega)}{\epsilon + i \omega} d\omega + \int_0^a \frac{\varphi(\omega)}{\epsilon + i \omega} d\omega = \int_0^a \frac{\varphi(-\omega)}{\epsilon - i \omega} d\omega + \int_0^a \frac{\varphi(\omega)}{\epsilon + i \omega} d\omega$$

Analizamos por separado las dos integrales:

$$\int_0^a \frac{\varphi(-\omega)}{\epsilon - i \omega} d\omega = \int_0^a \frac{\varphi(-\omega) - \varphi(0)}{\epsilon - i \omega} d\omega + \varphi(0) \int_0^a \frac{1}{\epsilon - i \omega} d\omega$$

$$\int_0^a \frac{\varphi(\omega)}{\epsilon + i \omega} d\omega = \int_0^a \frac{\varphi(\omega) - \varphi(0)}{\epsilon + i \omega} d\omega + \varphi(0) \int_0^a \frac{1}{\epsilon + i \omega} d\omega$$

Sumando queda

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\omega)}{\epsilon + i \omega} d\omega = \int_0^a \left[\frac{\varphi(\omega) - \varphi(0)}{\epsilon + i \omega} + \frac{\varphi(-\omega) - \varphi(0)}{\epsilon - i \omega} \right] d\omega + 2 \varphi(0) \int_0^a \frac{1}{1 + s^2} ds$$

Tomando límite $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\omega)}{\epsilon + i \omega} d\omega = \int_0^a \frac{\varphi(\omega) - \varphi(-\omega)}{i \omega} d\omega + \pi \varphi(0)$. Luego

$$\hat{u}(\omega) = \frac{1}{i \omega} + \pi \delta(\omega) \quad (\text{valor principal})$$

3) Una tercer manera es considerando que para $M \rightarrow \infty$ se tiene $\prod_{[0, M]}(t) \rightarrow u(t)$ y transformando queda

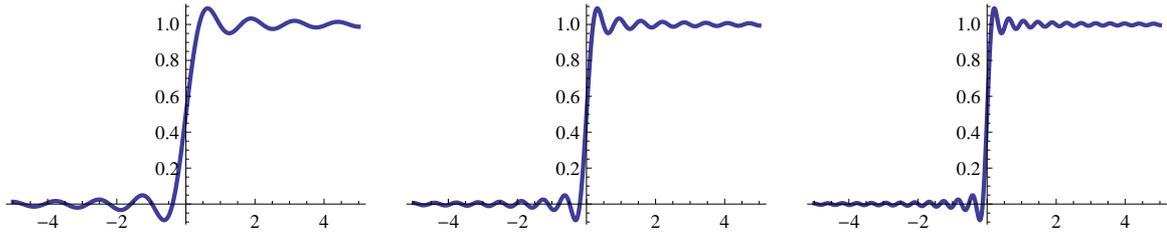
$$\int_0^M e^{-i \omega t} dt = \frac{1 - \cos(M \omega)}{i \omega} + \frac{\text{sen}(M \omega)}{\omega} \rightarrow \frac{1}{i \omega} + \pi \delta(\omega)$$

La fórmula de inversión propone la siguiente aproximación armónica del escalón unitario $u(t)$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \hat{u}(\omega) e^{i \omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M \frac{\text{sen}(\omega t)}{\omega} d\omega + \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^M \frac{\text{sen} \omega t}{\omega} d\omega + \frac{1}{2}$$

Utilizando la función "seno integral" : $\text{si}(t) = \int_0^t \frac{\sin \omega}{\omega} d\omega$ del programa *Mathematica* podemos graficar esta aproximación armónica.

```
g1 = Plot[ $\frac{1}{\pi} \text{SinIntegral}[5 t] + \frac{1}{2}$ , {t, -5, 5}, PlotStyle -> {Thick}];
g2 = Plot[ $\frac{1}{\pi} \text{SinIntegral}[10 t] + \frac{1}{2}$ , {t, -5, 5}, PlotStyle -> {Thick}];
g3 = Plot[ $\frac{1}{\pi} \text{SinIntegral}[15 t] + \frac{1}{2}$ , {t, -5, 5}, PlotStyle -> {Thick}];
GraphicsGrid[{{g1, g2, g3}}]
```



Observación. Se ve que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\epsilon + i\omega} \neq \frac{1}{i\omega}$ en el sentido de las funciones generalizadas.

Se tiene

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [-e^{\epsilon t} u(-t)] = -u(-t)$$

Transformando Fourier se tiene: $-\frac{1}{\epsilon - i\omega}$ y se puede ver como en el caso ya analizado que

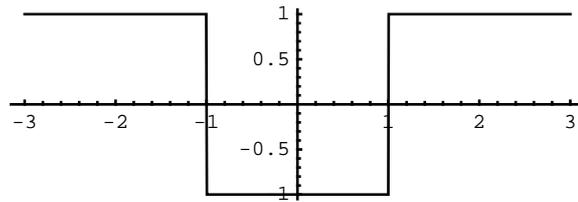
$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\omega)}{\epsilon - i\omega} d\omega \right) = \int_a^u \frac{\varphi(\omega) - \varphi(0)}{i\omega} d\omega - \pi \varphi(0)$$

Como $\text{sg}(t) = u(t) - u(-t)$, se obtiene nuevamente $\hat{\text{sg}}(\omega) = \frac{2}{i\omega}$.

Ejemplo

Calculamos la transformada de la función $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 < t < 1 \\ -1 & \text{si } |t| > 1 \end{cases}$

```
Plot[If[Abs[t] < 1, -1, 1], {t, -3, 3}, AspectRatio -> Automatic];
```



.La escribimos como suma de funciones cuya transformada conocemos:

$$f(t) = u(t - 1) - \Pi_{[-1,1]}(t) + u(-t - 1)$$

Utilizando las propiedades de la transformada se tiene

$$\hat{f}(\omega) = e^{-i\omega} \hat{u}(\omega) - 2 \frac{\text{sen } \omega}{\omega} + e^{i\omega} \hat{u}(-\omega) = -4 \frac{\text{sen } \omega}{\omega} + 2\pi \delta(\omega)$$

Ejercicio

- a) Utilizar la expresión $f(t) = 1 - 2 \Pi_{[-1,1]}(t)$ para obtener nuevamente la transformada.
- b) Comprobar la fórmula de inversión y graficar la aproximación armónica.
- c) Comprobar que la transformada de la derivada coincide con la obtenida por la propiedad correspondiente.

Ejercicio

Por Transformada de Fourier resolver la deconvolución $x * \text{sg}(t) = e^{-|t|}$ y verificar la solución obtenida.

Ejercicio

Obtener la convolución por Transformada de Fourier $\text{sg}(t) * e^{-|t|}$ y también directamente.

Ejemplo

Resolvemos la ecuación de convolución

$$x(t) = e^{-|t|} + \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) u(t - \tau) d\tau$$

Transformando Fourier obtenemos $\hat{x}(\omega) = \frac{2}{\omega^2 + 1} + \hat{x}(\omega) \left\{ \frac{1}{i\omega} + \pi \delta(\omega) \right\}$ y despejando queda

$$\hat{x}(\omega) = \pi \frac{i\omega}{i\omega - 1} \hat{x}(0) + \frac{2i\omega}{(\omega^2 + 1)(i\omega - 1)} = \frac{2i\omega}{(\omega^2 + 1)(i\omega - 1)} = -\frac{1}{(i\omega - 1)^2} - \frac{1}{2(i\omega - 1)} + \frac{1}{2(i\omega + 1)}$$

Luego

$$x(t) = t e^t u(-t) + \frac{1}{2} e^t u(-t) + \frac{1}{2} e^{-t} u(t) = t e^t u(-t) + \frac{1}{2} e^{-|t|}$$

Como ejercicio comprobar esta solución. Observar que la solución debe ser continua y efectivamente lo es.

Ejercicio

a) Resolver la ecuación de convolución $x(t) = e^{-|t|} + x * \text{sg}(t)$ y verificar la solución obtenida.

$$\text{Rta: } x(t) = \frac{1}{3} e^{-t} u(t) - e^t u(-t) + \frac{4}{3} e^{2t} u(-t)$$

b) Idem con $x(t) = t e^{-t} u(t) + x * e^{-|t|}$ y verificar la solución obtenida.

$$\text{Rta: } x(t) = \frac{1}{2} (\cos t - e^{-t}) u(t) - \frac{1}{2} \cos t u(-t)$$

Ejercicio

Resolver la siguiente ecuación de convolución para cada valor de k real: $x(t) = e^{-t} u(t) + k x * e^{-|t|}$

Ejercicio

Usando la propiedad F2 hallar la transformada de $t u(t)$.

5. Transformada de Fourier de armónicos.

Es claro que un armónico $e^{i \omega_0 t}$ debe tener en su espectro únicamente la frecuencia ω_0 .

Se tiene la aproximación $f_M(t) = e^{i \omega_0 t} \prod_{[-M, M]}(t) : \lim_{M \rightarrow \infty} f_M(t) = e^{i \omega_0 t}$

Fácilmente obtenemos $\hat{f}_M(\omega) = 2 \frac{\text{sen } M(\omega - \omega_0)}{(\omega - \omega_0)}$ y aplicando un teorema previo obtenemos

$$\lim_{M \rightarrow \infty} 2 \frac{\text{sen } M(\omega - \omega_0)}{(\omega - \omega_0)} = 2 \pi \delta(\omega - \omega_0)$$

Luego

$$e^{i \omega_0 t}(\omega) = 2 \pi \delta(\omega - \omega_0)$$

Expresando $\text{sen } \omega_0 t$ y $\text{cos } \omega_0 t$ como suma de exponenciales queda:

$$\widehat{\text{sen } \omega_0 t}(\omega) = -i \pi \{ \delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0) \}$$

$$\widehat{\text{cos } \omega_0 t}(\omega) = \pi \{ \delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0) \}$$

En un ejercicio se propone aproximar $\text{cos } \omega_0 t$ por $\lim_{M \rightarrow +\infty} \prod_{[-M, M]}(t) \text{cos } \omega_0 t$

y mediante esta aproximación transformar Fourier y obtener la fórmula anterior.

Ejercicio

Los polinomios trigonométricos $p(\sin(\omega_k t), \cos(\omega_k t))$ tienen finitas frecuencias asociadas: son suma finita de armónicos.

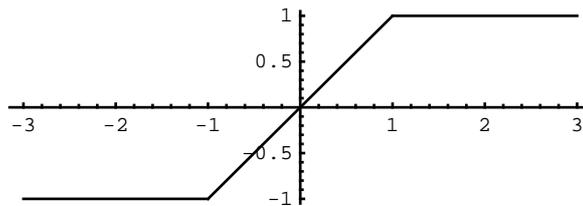
- a) Descomponer armónicamente el polinomio trigonométrico $\sin^3 t \cos t$ y hallar su transformada de Fourier.
- b) Hacer lo propio con $\cos^2 t \sin^2 t$ y $\sin(2t) \cos(3t)$

Ejercicio

Hallar la transformada de Fourier de una función periódica.
Sugerencia: desarrollarla en Fourier y aproximarla por las sumas parciales.

Ejemplo

Calculamos la transformada de la función saturación : $\text{sat}(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t < -1 \\ t & \text{si } |t| \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < t \end{cases}$



La escribimos como suma $\text{sat}(t) = -u(-t - 1) + t \Pi_{[-1,1]}(t) + u(t - 1)$

Usando las propiedades y la tabla se tiene

$$\begin{aligned} \hat{\text{sat}}(\omega) &= -e^{i\omega} \hat{u}(-\omega) + 2i \frac{\omega \cos \omega - \text{sen } \omega}{\omega^2} + e^{-i\omega} \hat{u}(\omega) \\ &= -e^{i\omega} \left\{ p.v. \left(\frac{1}{-i\omega} \right) + \pi \delta(\omega) \right\} + 2i \frac{\omega \cos \omega - \text{sen } \omega}{\omega^2} + e^{-i\omega} \left\{ p.v. \left(\frac{1}{i\omega} \right) + \pi \delta(\omega) \right\} \\ &= 2 \cos \omega \, p.v. \left(\frac{1}{i\omega} \right) + 2i \frac{\omega \cos \omega - \text{sen } \omega}{\omega^2} \end{aligned}$$

Como función generalizada se puede reescribir así:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\text{sat}}(\omega) \varphi(\omega) d\omega = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|\omega| > \epsilon} \left[\frac{2 \cos \omega}{i \omega} \varphi(\omega) + 2i \frac{\cos \omega}{\omega} \varphi(\omega) - 2i \frac{\text{sen } \omega}{\omega^2} \varphi(\omega) \right] d\omega$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|\omega| > \epsilon} -2i \frac{\text{sen } \omega}{\omega^2} \varphi(\omega) d\omega = -2i \frac{\text{sen } \omega}{\omega^2} \varphi(\omega) \quad (\text{valor principal})$$

$$\hat{\text{sat}}(\omega) = -2i \frac{\text{sen } \omega}{\omega^2} \quad (\text{valor principal})$$

Comprobamos la fórmula de inversión:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\text{sat}}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} (-2i) \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega} \left[\frac{\text{sen } \omega}{\omega} e^{i\omega t} - \frac{\text{sen}(-\omega)}{-\omega} e^{-i\omega t} \right] d\omega$$

$$= -\frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } \omega}{\omega} 2i \frac{\text{sen } \omega t}{\omega} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega(1-t) - \cos \omega(1+t)}{\omega^2} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega(1-t) - \cos \omega(1+t)}{\omega^2} d\omega = \text{sat}(t)$$

Hallar la Transformada de la derivada y comprobar la fórmula correspondiente.

6. Transformada de Fourier del valor principal $\mathcal{P}\left(\frac{1}{t}\right)$.

Se tiene la aproximación $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f_{\epsilon}(t) = p.v.\left(\frac{1}{t}\right)$ donde $f_{\epsilon}(t) = \begin{cases} t^{-1} & \text{si } \epsilon < |t| < \epsilon^{-1} \\ 0 & \text{si } |t| < \epsilon \text{ o } |t| > \epsilon^{-1} \end{cases}$

Transformando queda

$$\hat{f}_{\epsilon}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\epsilon}(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{\epsilon}^{\epsilon^{-1}} \frac{1}{t} [e^{-i\omega t} - e^{i\omega t}] dt = -2i \int_{\epsilon}^{\epsilon^{-1}} \frac{\text{sen } \omega t}{t} dt$$

El límite vale $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \hat{f}_{\epsilon}(\omega) = -2i \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } \omega t}{t} dt = -\pi i \text{sg}(\omega)$

Luego

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{t}\right) = -\pi i \text{sg}(\omega)$$

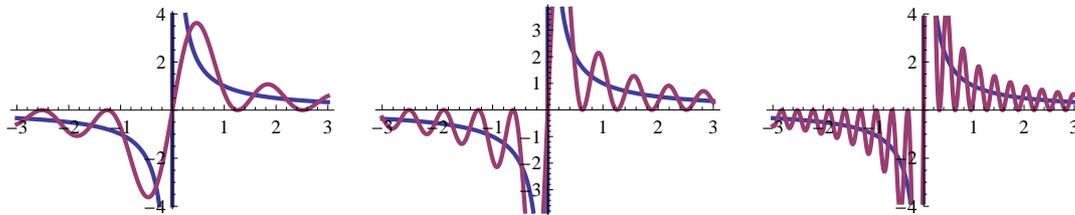
La fórmula de inversión luce así

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-M}^M -\pi i \text{sg}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1 - \cos Mt}{t}$$

que es la aproximante armónica del valor principal.

Graficamos $\frac{1}{t}$ y su aproximante armónica para $M = 5, 10, 20$.

```
g1 = Plot[{1/t, (1 - Cos[5 t])/t}, {t, -3, 3}, PlotStyle -> {Thick}];
g2 = Plot[{1/t, (1 - Cos[10 t])/t}, {t, -3, 3}, PlotStyle -> {Thick}];
g3 = Plot[{1/t, (1 - Cos[20 t])/t}, {t, -3, 3}, PlotStyle -> {Thick}];
GraphicsGrid[{{g1, g2, g3}}
```



7. Transformada de |t|.

Para hallar la transformada de Fourier de $|t| = \int_0^t \text{sg}(\tau) d\tau = t \text{sg}(t)$ utilizamos la propiedad F2

$$\mathcal{F}(t \text{sg}(t))(\omega) = i \mathcal{F}(\text{sg}(t))'(\omega) = \left(\frac{2}{\omega}\right)' = -2 \omega^{-2} \quad (\text{derivada del valor principal})$$

La fórmula de inversión es cierta pues:

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} p.v. \int_{-M}^M \left(\frac{2}{\omega}\right)' e^{i\omega t} d\omega &= \lim_{M \rightarrow \infty} -\frac{1}{2\pi} p.v. \int_{-M}^M \frac{2}{\omega} (e^{i\omega t})' d\omega = \lim_{M \rightarrow \infty} -\frac{1}{2\pi} p.v. \int_{-M}^M \frac{2}{\omega} i t e^{i\omega t} d\omega \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} -\frac{it}{\pi} \int_0^M \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{\omega} d\omega = \lim_{M \rightarrow \infty} -\frac{it}{\pi} \int_0^M \frac{2i \text{sen}(\omega t)}{\omega} d\omega = \frac{2t}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{sen}(\omega t)}{\omega} d\omega = t \text{sg}(t) = |t| \end{aligned}$$

Ejercicio

Mediante la caracterización de $\left(\frac{2}{\omega}\right)'$ obtenida en la unidad 2

$$\left(\frac{2}{\omega}\right)'(\varphi) = -2 \int_0^\infty \frac{\varphi(\omega) - 2\varphi(0) + \varphi(-\omega)}{\omega^2} d\omega$$

obtener nuevamente la fórmula de inversión para $\left(\frac{2}{\omega}\right)'$.

Ejercicio

Calcular la transformada de Fourier de $\int_0^t |\tau| d\tau = \frac{1}{2} \text{sg}(t) t^2$.

Ejercicio

Resolver la deconvolución $x * e^{-|t|} = u(t)$ y comprobarla.

Rta: $x(t) = \frac{1}{2} [u(t) - \delta'(t)]$

Ejercicio

Resolver la deconvolución $x * |t| = e^{-|t|}$ y comprobarla.

APLICACIÓN A SISTEMAS LINEALES

Consideremos una ecuación $\mathcal{L}(x) = \mathcal{M}(F(t))$, donde la entrada $F(t)$ es una función generalizada temperada, y por lo tanto $\mathcal{M}(F(t))$ también es temperada. Su transformada de Fourier es

$$p(i\omega)\hat{x}(\omega) = q(i\omega)\hat{F}(\omega)$$

donde $p(\lambda)$ es el polinomio característico de \mathcal{L} y $q(\lambda)$ el de \mathcal{M}

i) Supongamos que ninguna raíz característica de \mathcal{L} es imaginaria pura. Luego $p(i\omega)$ no se anula, y dividiendo queda

$$\hat{x}(\omega) = \frac{q(i\omega)}{p(i\omega)}\hat{F}(\omega) = H(i\omega)\hat{F}(\omega)$$

donde $H(i\omega)$ tiene infinitas derivadas y crecimiento a lo sumo potencial. Luego $H(i\omega)\hat{F}(\omega)$ es una función generalizada temperada, y por lo tanto $x(t)$ es una solución temperada de la ecuación.

Como ninguna solución de la ecuación homogénea $\mathcal{L}(x) = 0$ es temperada, $x(t)$ es la única solución temperada.

Para $F = \delta$, la solución es $h(t)$, y $\hat{h}(\omega) = \frac{q(i\omega)}{p(i\omega)} = H(i\omega)$ es la función de transferencia.

ii) Si hay raíces características con parte real cero, las correspondientes soluciones de la ecuación homogénea son temperadas, y entonces en principio, puede haber muchas soluciones temperadas. Además queda el problema de si existe solución. Ver ejemplo 4.

Ejemplo 1

La ecuación $x'' + 2x' + x = f(t)$ es estable y $\hat{h}(\omega) = \frac{1}{(i\omega + 1)^2}$.

Por la tabla $h(t) = t e^{-t} u(t)$ como podríamos haber calculado directamente en el "tiempo".

Si $f(t) = e^{-2t}$, podemos calcular la respuesta mediante la convolución

$$x(t) = (t e^{-t} u(t)) * e^{-2t}$$

o por inversión

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{(4 + \omega^2)} \frac{e^{i\omega t}}{(i\omega + 1)^2} d\omega$$

o por tabla, descomponiendo en fracciones simples,

$$\hat{x}(\omega) = \frac{4}{(4+\omega^2)} \frac{1}{(i\omega+1)^2}$$

Por cualquier camino se obtiene la solución temperada $x(t) = \frac{1}{9} e^{2t} u(-t) + \frac{4}{3} t e^{-t} - \frac{8}{9} e^{-t} + e^{-2t}$.

Ejemplo 2

Estudiamos mediante transformada de Fourier la ecuación estable $x'' + 3x' + 2x = e^t u(-t)$
 Transformando Fourier, despejando y separando en fracciones simples, obtenemos

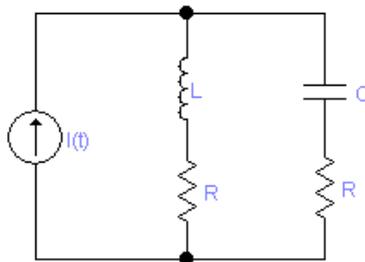
$$\hat{x}(\omega) = \frac{1}{(1-i\omega)(1+i\omega)(2+i\omega)} = \frac{1}{6(1-i\omega)} + \frac{1}{2(1+i\omega)} - \frac{1}{3(2+i\omega)}$$

Por la tabla, la antitransformada es la función temperada

$$x(t) = \frac{1}{6} e^t u(-t) + \frac{1}{2} e^{-t} u(t) - \frac{1}{3} e^{-2t} u(t)$$

Ejemplo 3

Consideremos el circuito de la figura.



Sea $I(t)$ la corriente de entrada. La ecuación de la corriente en la bobina i es:

$$L i'' + 2R i' + \frac{1}{C} i = R I'(t) + \frac{1}{C} I(t)$$

Para $I(t) = 5 \text{ sg}(t) \text{ A}$, $R = 1 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$ y $C = 1 \text{ F}$ queda la ecuación

$$i'' + 2i' + i = 10 \delta(t) + 5 \text{ sg}(t)$$

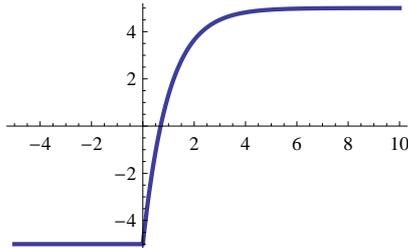
Transformando Fourier $(j\omega)^2 \hat{i}(\omega) + 2(j\omega)\hat{i}(\omega) + \hat{i}(\omega) = 10 + 5 \frac{2}{j\omega}$ y despejando

$$\hat{i}(\omega) = -10 \frac{1}{\omega(\omega-j)} = 10 \left(\frac{j}{\omega-j} - \frac{j}{\omega} \right) = 10 \left(-\frac{1}{1+j\omega} + \frac{1}{2} \frac{2}{j\omega} \right) = -\frac{10}{1+j\omega} + 5 \frac{2}{j\omega}$$

Antitransformando obtenemos la solución temperada

$$i(t) = -10 e^{-t} u(t) + 5 \operatorname{sg}(t)$$

```
i[t_] := If[t < 0, -5, 5 - 10 e^-t]
Plot[i[t], {t, -5, 10}, PlotStyle -> {Thick}]
```



Ejercicio

- Comprobar que la corriente hallada verifica la ecuación.
- Verificar que la respuesta al impulso unitario de $i'' + 2i' + i = I(t) + I'(t)$ es $h(t) = e^{-t} u(t)$.
- Obtener la solución $x(t)$ convolucionando con la respuesta al impulso unitario.

Ejercicio

En el circuito anterior, hallar la solución si la corriente de entrada es $I(t) = e^{-|t|}$.

Ejemplo 4 .

- La ecuación inestable $x'' + x = \delta(t)$ tiene la transformada de Fourier

$$(-\omega^2 + 1) \hat{x}(\omega) = 1 \Rightarrow \hat{x}(\omega) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-\omega} + \frac{1}{1+\omega} \right)$$

Como la transformada de $e^{iat} \operatorname{sg}(t)$ es $\frac{2}{i(\omega-a)}$ y la de $e^{-iat} \operatorname{sg}(t)$ es $\frac{2}{i(\omega+a)}$ resulta que

$$\text{la transformada de } \frac{i}{4} \operatorname{sg}(t) (-e^{-it} + e^{it}) = \frac{1}{2} \operatorname{sg}(t) \operatorname{sen} t \text{ es } \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-\omega} + \frac{1}{1+\omega} \right).$$

Luego una solución temperada es $x(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sg}(t) \operatorname{sen} t$. Otra es $h(t) = \operatorname{sen} t u(t)$. En este caso todas las soluciones de la homogénea son temperadas y $x(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sg}(t) \operatorname{sen} t = h(t) - \frac{1}{2} \operatorname{sen} t$.

- La ecuación inestable $x'' - x = \delta(t)$ tiene transformada de Fourier

$$(-\omega^2 - 1) \hat{x}(\omega) = 1 \Rightarrow \hat{x}(\omega) = -\frac{1}{\omega^2 + 1} \text{ es temperada y } x(t) = -\frac{1}{2} e^{-|t|}$$

Como ninguna solución de la homogénea es temperada, $x(t)$ es la única solución temperada.

Ejemplo 5 Filtros Butterwoth

El físico británico S.Butterworth introduce alrededor de 1930 una clase básica de filtros que llevan su nombre.

Un filtro ideal con frecuencia de corte ω_0 tiene $H_n(i\omega) = \prod_{[-\omega_0, \omega_0]}(\omega)$.

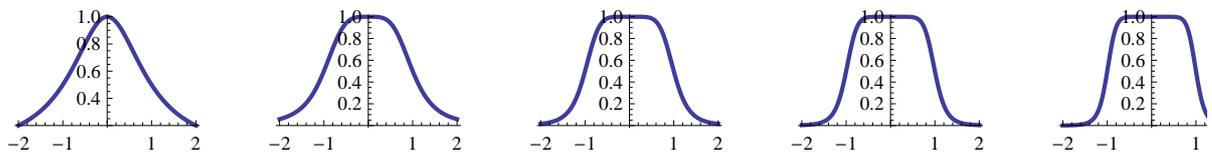
Para cada orden n busca una función de transferencia $H_n(i\omega)$ lo más cercana posible al filtro ideal.

La elige de tal manera que

$$|H_n(i\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}}$$

Su gráfica es cada vez más achatada a medida que el orden crece según se ve en los ejemplos de abajo (con $\omega_0 = 1$).

```
g[n_] := Plot[(1 + \omega^2^n)^-1, {\omega, -2, 2}, PlotStyle -> {Thick}]
GraphicsGrid[{{g[1], g[2], g[3], g[4], g[5]}}
```



Vemos que cada vez se parece más a un filtro ideal.

Para estabilidad elige los polos con parte real negativa y los ubica sobre la circunferencia $|z| = \omega_0$.

Procedemos al diseño del filtro de orden 2 y 3.

Orden 2

Buscamos la función $H_2(z)$ para $\omega_0 = 1$.

Si los polos son $a \pm ib$ con $a^2 + b^2 = 1$ y $a < 0$ entonces

$$H_2(z) = \frac{1}{(z - a - ib)(z - a + ib)} = \frac{1}{(z - a)^2 + b^2} = \frac{1}{z^2 - 2az + 1} \quad \text{y queremos que}$$

$$|H_2(i\omega)|^2 = \frac{1}{1 - \omega^2 - 2a\omega i + \omega^2 i^2} = \frac{1}{(1 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2} = \frac{1}{1 + \omega^4}$$

El valor de a debe cumplir $1 - 2\omega^2 + \omega^4 + 4a^2\omega^2 = 1 + \omega^4$ o sea $4a^2 - 2 = 0$ ó $a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

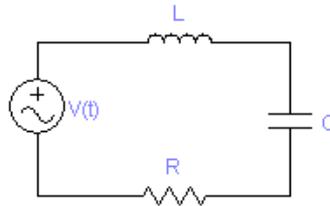
Luego las raíces son $-\frac{1}{\sqrt{2}} \pm i\frac{1}{\sqrt{2}}$ y $H_2(z) = \frac{1}{z^2 + \sqrt{2}z + 1}$.

Para la frecuencia de corte ω_0 tomamo $H_2\left(\frac{z}{\omega_0}\right) = \frac{\omega_0^2}{z^2 + \sqrt{2}\omega_0 z + \omega_0^2}$.

Entonces esta función tiene una gráfica similar a la anterior pero con frecuencia de corte ω_0 .

La ecuación asociada es $x'' + \sqrt{2}\omega_0 x' + \omega_0^2 x = \omega_0^2 f(t)$

Puede ser la ecuación de un circuito LRC en serie con ecuación de salida $v_C'' + \frac{R}{L}v_C' + \frac{1}{LC}v_C = \frac{1}{LC}V(t)$



Para una frecuencia de corte ω_0 tomamos $\frac{R}{L} = \sqrt{2} \omega_0$, $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$, entonces $L = \omega_0^{-1} H$, $C = \omega_0^{-1} F$ y $R = \sqrt{2} \Omega$.

Esta realización del filtro tiene entrada $V(t)$ y salida v_C .

Orden 3

Buscamos la función $H_3(z)$ para $\omega_0 = 1$.

Si los polos son -1 y $a \pm ib$ con $a^2 + b^2 = 1$ y $a < 0$ y entonces

$$H_3(z) = \frac{1}{(z+1)(z-a-ib)(z-a+ib)} = \frac{1}{(z+1)((z-a)^2+b^2)} = \frac{1}{(z+1)(z^2-2az+1)}$$

y queremos que
$$|H_3(i\omega)|^2 = \frac{1}{(1+\omega^2)} \frac{1}{[(1-\omega^2)^2+4a^2\omega^2]} = \frac{1}{1+\omega^6}$$

Luego debe ser $(1 + \omega^2)[(1 - \omega^2)^2 + 4a^2\omega^2] = 1 + \omega^6$ de donde resulta $a = -\frac{1}{2}$ y por lo tanto

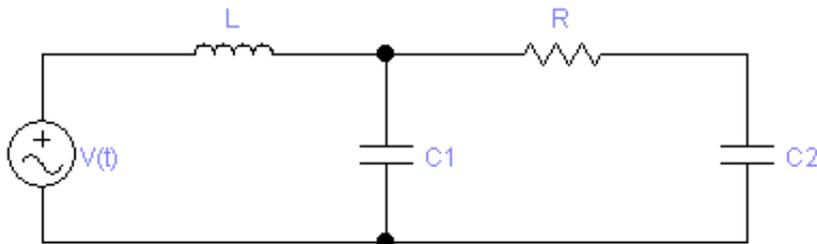
$$H_3(z) = \frac{1}{(z+1)(z^2+z+1)} = \frac{1}{z^3+2z^2+2z+1}$$

y los tres polos son -1 , $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

Para la frecuencia de corte ω_0 se tiene
$$\tilde{H}_3(z) = H_3\left(\frac{z}{\omega_0}\right) = \frac{\omega_0^3}{z^3+2\omega_0 z^2+2\omega_0^2 z+\omega_0^3}$$

La ecuación diferencial asociada es $x''' + 2\omega_0 x'' + 2\omega_0^2 x' + \omega_0^3 x = \omega_0^3 f(t)$

Podemos diseñar un filtro analógico con esta ecuación. Como debe ser de tercer orden colocamos una bobina y dos capacitores.



Las ecuaciones que verifican la corriente en la bobina i_L y los potenciales en los capacitores v_1 , v_2 son

$$\begin{pmatrix} i_L \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L} & 0 \\ \frac{1}{C_1} & -\frac{1}{RC_1} & \frac{1}{RC_1} \\ 0 & \frac{1}{RC_2} & -\frac{1}{RC_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_L \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} V(t)$$

con polinomio característico $\lambda^3 + \frac{1}{R} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \lambda^2 + \frac{1}{LC_1} \lambda + \frac{1}{LRC_1C_2}$ que es internamente estable.

La salida $y = v_2$ satisface

$$y''' + \frac{1}{R} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) y'' + \frac{1}{LC_1} y' + \frac{1}{LRC_1C_2} y = \frac{1}{LRC_1C_2} V(t)$$

Para homologarla a $x''' + 2\omega_0 x'' + 2\omega_0^2 x' + \omega_0^3 x = \omega_0^3 f(t)$ igualamos los coeficientes y resolvemos el sistema obteniendo las siguientes constantes del circuito en términos de la frecuencia de corte

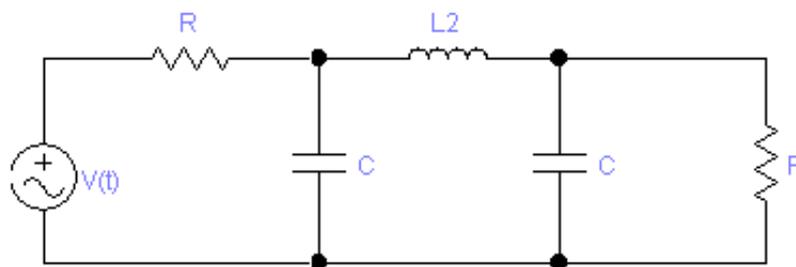
$$L = \frac{1}{2\omega_0} H, \quad R = \frac{2}{3} \Omega, \quad C_1 = \frac{1}{\omega_0} F, \quad C_2 = \frac{3}{\omega_0} F$$

Ejercicio

Probar que $H_4(z) = \frac{1}{(z^2 - 2\alpha z + 1)(z^2 - 2\beta z + 1)}$ con $\alpha = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ y $\beta = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ y que las cuatro raíces son $\alpha \pm i\beta$, $\beta \pm i\alpha$ que tienen módulo 1.

Ejercicio (Lathi)

En el circuito de la figura, sean i_L corriente en la bobina y v_1 , v_2 los potenciales en los capacitores. Considere como salida la caída de potencial $v_R = v_2$ en la resistencia de la derecha.



a) Muestre que el sistema del circuito es

$$\begin{pmatrix} i_L \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{CR} & 0 \\ \frac{1}{C} & 0 & -\frac{1}{CR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_L \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{RC} \\ 0 \end{pmatrix} V(t)$$

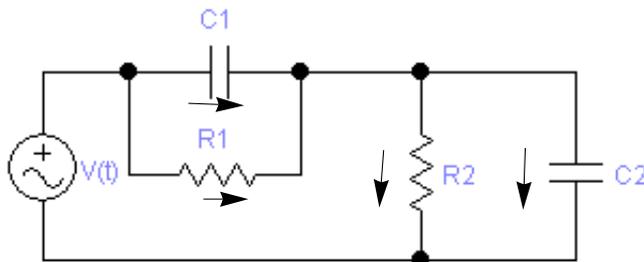
con i_L corriente en la bobina y v_1, v_2 caídas de potencial en los capacitores. Muestre que es estable.

b) Halle la ecuación de tercer orden de la salida v_2 .

c) Eligiendo convenientes constantes del circuito demuestre que también realiza el filtro pasabajo Butterworth de tercer orden.

Ejemplo 6 Atenuación de una señal sin distorsión

El siguiente circuito permite atenuar sin distorsión, la entrada $V(t)$ en la salida v_{C_1} .



Consideremos los potenciales en los capacitores v_1, v_2 que están ligados por $v_1 + v_2 = V(t)$. Se deduce la ecuación

$$\frac{R_1 R_2 (C_1 + C_2)}{R_1 + R_2} v_1' + v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} [R_2 C_2 V'(t) + V(t)]$$

Si $\frac{R_1 R_2 (C_1 + C_2)}{R_1 + R_2} = R_2 C_2 = K$ lo cual equivale a $R_1 C_1 = R_2 C_2$ entonces la ecuación queda

$$K v_1' + v_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} [K V'(t) + V(t)]$$

y la entrada $V(t)$ tiene por salida $v_1(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V(t)$ que es la entrada atenuada y no distorsionada.

Usando la frecuencia se tiene

$$\left(\frac{R_1 R_2 (C_1 + C_2)}{R_1 + R_2} i\omega + 1 \right) H(i\omega) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} [R_2 C_2 i\omega + 1]$$

Como $\frac{R_1 R_2 (C_1 + C_2)}{R_1 + R_2} = R_2 C_2$ queda $H(i\omega) = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ que es una constante positiva menor que 1.

TEOREMA DEL MUESTREO

Tren de deltas

Dado un paso $T > 0$ consideramos la suma de infinitas deltas

$$\Pi_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k T)$$

que se llama "tren de deltas" de paso T que es una función generalizada.

Teorema

El transformado Fourier de un tren de deltas es otro tren de deltas. Más precisamente

$$\mathcal{F}(\Pi_T(t))(\omega) = \frac{2\pi}{T} \Pi_{\frac{2\pi}{T}}(\omega)$$

Demostración

Transformamos una suma parcial

$$\mathcal{F}[\sum_{k=-n}^n \delta(t - k T)](\omega) = \sum_{k=-n}^n e^{-ik\omega T} = e^{i\omega n T} \sum_{k=0}^{2n} e^{-ik\omega T}$$

Es una función periódica de período $\frac{2\pi}{T}$.

Además una serie geométrica finita de razón $r = e^{-i\omega T}$ da $\sum_{k=0}^n r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$ y por ello

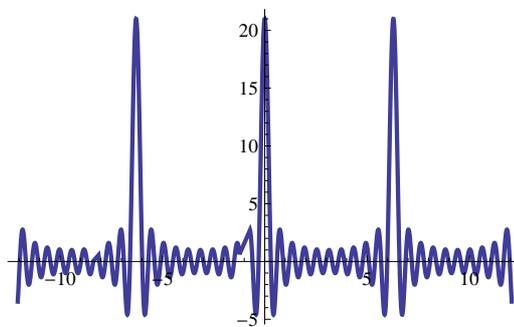
$$\sum_{k=0}^{2n} e^{-ik\omega T} = \frac{1-e^{-i\omega T(2n+1)}}{1-e^{-i\omega T}} = \frac{e^{-i\omega T(n+1/2)}}{e^{-i\omega T/2}} \frac{e^{i\omega T(n+1/2)} - e^{-i\omega T(n+1/2)}}{e^{i\omega T/2} - e^{-i\omega T/2}} = e^{-i\omega n T} \frac{\text{sen } \omega T(n+\frac{1}{2})}{\text{sen } T \frac{\omega}{2}}$$

y finalmente obtenemos la expresión compacta de esta función de período $\frac{2\pi}{T}$

$$\mathcal{F}[\sum_{k=-n}^n \delta(t - k T)](\omega) = \frac{\text{sen } \omega T(n+\frac{1}{2})}{\text{sen } T \omega/2} = D_n(\omega T)$$

Hacemos la gráfica para $n = 10$ y $T = 1$.

```
n = 10; Plot[ $\frac{\text{Sin}[\omega(n + \frac{1}{2})]}{\text{Sin}[\omega/2]}$ , { $\omega$ , -4  $\pi$  + 0.5, 4  $\pi$  - 0.5}, PlotRange -> All, PlotStyle -> {Thick}]
```



Se observa la periodicidad y también se puede sospechar que en el límite puede haber deltas en cada $\frac{2\pi}{T} k$. Para averiguarlo, estudiamos el límite como función generalizada:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} D_n(\omega T) \varphi(\omega) d\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } \omega T (n+1/2)}{\text{sen } \omega T/2} \varphi(\omega) d\omega$$

Consideramos $\varphi(t)$ con soporte compacto en el intervalo abierto $(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T})$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } \omega T (n+1/2)}{\text{sen } \omega T/2} \varphi(\omega) d\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } \omega T (n+1/2)}{\omega} \left[\frac{\omega}{\text{sen } \omega T/2} \varphi(\omega) \right] d\omega$$

Como $\text{sen } \omega \frac{T}{2}$ no se anula en el intervalo $(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T})$, la función $g(t) = \frac{\omega}{\text{sen } \omega T/2} \varphi(\omega)$ es una función derivable y cero fuera de un intervalo finito. Por el teorema 5 el límite vale $\pi g(0) = \frac{2\pi}{T} \varphi(0)$. Luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n(\omega T) = \frac{2\pi}{T} \delta(\omega) \text{ en el intervalo } \left(-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right)$$

Por periodicidad ello ocurre en cada intervalo y se obtiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n(\omega T) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{T} k\right)$$

Luego

$$\mathcal{F}(\Pi_T(t))(\omega) = \frac{2\pi}{T} \Pi_{\frac{2\pi}{T}}(\omega)$$

q.e.d.

Mediante un tren de deltas se obtienen dos cosas importantes.

a) Si $f(t)$ es una función continua tenemos

$$f(t) \Pi_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT)$$

es el tren de deltas "modulado" por $f(t)$. que equivale al muestreo de $f(t)$ de paso T . Transformando Fourier obtenemos, usando la propiedad de transformada de un producto,

$$\mathcal{F}[f(t) \Pi_T(t)] = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(\Pi_T) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(f) * \frac{2\pi}{T} \Pi_{\frac{2\pi}{T}}(\omega) = \frac{1}{T} \mathcal{F}(f) * \Pi_{\frac{2\pi}{T}}(\omega)$$

b) Si $g(t)$ es nula fuera del intervalo $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ entonces

$$(g * \Pi_T)(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(t - kT)$$

es la función periódica de período T con modelo g .

Teorema del muestreo

Sea $f(t)$ una función continua.

Si la muestreamos con paso T , ¿es posible recuperarla desde la muestra?

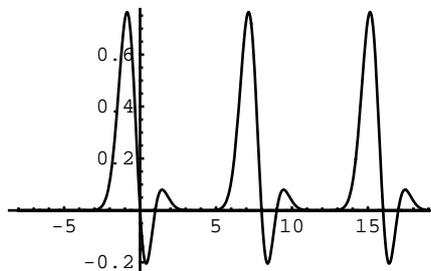
Según lo probado tenemos

$$T \mathcal{F}[f(t) \Pi_T(t)](\omega) = \left[\mathcal{F}(f) * \Pi_{\frac{2\pi}{T}} \right](\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(f)\left(\omega - \frac{2\pi}{T} k\right)$$

Es una suma de infinitas copias de $\mathcal{F}(f)(\omega)$ trasladadas periódicamente.

Si estas copias no se traslapan, como en la figura de abajo, entonces será posible aislar una copia y con ella se puede obtener $f(t)$ usando la fórmula de inversión.

Para que no se traslapen pedimos que $\mathcal{F}(f)(\omega)$ esté concentrado en un intervalo $[-\omega_0, \omega_0]$ y elegimos el paso T del muestreo de tal manera que $\left[-\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{T}\right] \supset [-\omega_0, \omega_0]$: por lo tanto $\omega_0 \leq \frac{\pi}{T}$.



La frecuencia física de un armónico $\cos(\omega_0 t + \delta)$, es decir, la cantidad de ciclos por segundo o Hertz, es $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$.

Teorema del muestreo

Sea $f(t)$ una función de banda limitada con frecuencia de corte ω_0 , o sea, $\hat{f}(\omega) = 0$ si $|\omega| > \omega_0 = 2\pi f_0$.

Eligiendo un paso de muestreo que satisface la "condición de Nyquist" $T \leq \frac{1}{2f_0}$ se puede recuperar $f(t)$ usando

los valores de la muestra $\{f(kT) : -\infty < k < \infty\}$.

Si $f(t)$ no tiene banda limitada, lo cual ocurre con todas las señales físicas, primero se la debe "filtrar" a una frecuencia conveniente f_0 y luego muestrear la señal filtrada satisfaciendo la condición de Nyquist.

Reconstrucción de una señal a partir de la muestra.

Para aislar el espectro de $f(t)$ usamos un escalón finito o filtro ideal:

$$G_{\frac{2\pi}{T}}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & \text{si } |\omega| > \frac{\pi}{T} \end{cases}$$

Su antitransformada es

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\frac{2\pi}{T}}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi} \frac{\text{sen } \frac{\pi t}{T}}{t} = \frac{1}{T} \frac{\text{sen } \frac{\pi t}{T}}{\frac{\pi t}{T}}$$

Si se cumple la condición de Nyquist, filtrando obtenemos

$$\hat{f}(\omega) = T \mathcal{F}(f(t) \Pi_T(t))(\omega) G_{\frac{2\pi}{T}}(\omega)$$

y antitransformando obtenemos $f(t)$ por la convolución entre la muestra y $\frac{1}{\pi} \frac{\text{sen } \frac{\pi t}{T}}{t}$:

$$f(t) = T [f(t) \pi_T(t)] * \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\pi t} = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT) * \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\pi t}$$

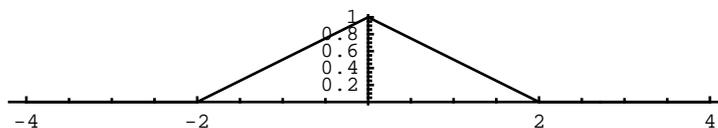
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \frac{\text{sen} \frac{\pi}{T} (t - kT)}{\frac{\pi}{T} (t - kT)}$$

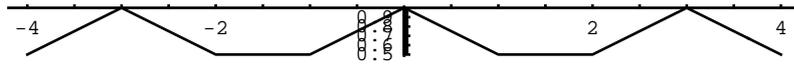
que reconstruye la función a partir de la muestra.

Esta es una fórmula de interpolación pues en cada kT todos los términos se anulan menos uno que da justamente $f(kT)$. Es importante notar que para reconstruir cada valor de $f(t)$ hay que conocer toda la muestra.

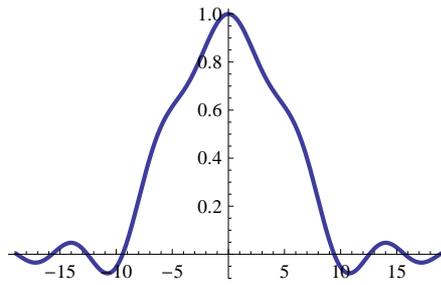
Ejemplo Mostramos un traslapamiento.

```
g[t_] := Which[Abs[t] ≥ 2, 0, -2 ≤ t ≤ 0, 1/2 (t + 2), 0 ≤ t ≤ 2, 1/2 (2 - t)]
Plot[g[t], {t, -4, 4}, AspectRatio → Automatic];
Plot[g[t + 6] + g[t + 3] + g[t] + g[t - 3] + g[t - 6], {t, -4, 4}, AspectRatio → Automatic];
```

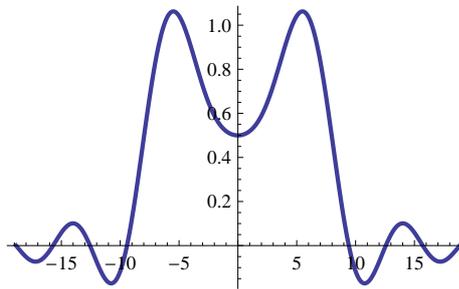




```
Plot[ $\frac{1}{2} \frac{\text{Sin}[t + 2 \pi]}{t + 2 \pi} + \frac{3}{4} \frac{\text{Sin}[t + \pi]}{t + \pi} + \frac{\text{Sin}[t]}{t} + \frac{3}{4} \frac{\text{Sin}[t - \pi]}{t - \pi} + \frac{1}{2} \frac{\text{Sin}[t - 2 \pi]}{t - 2 \pi},$ 
{t, -6 \pi, 6 \pi}, PlotStyle -> {Thick}]
```



```
Plot [  $\frac{\text{Sin}[t + 2 \pi]}{t + 2 \pi} + \frac{3}{4} \frac{\text{Sin}[t + \pi]}{t + \pi} + \frac{1}{2} \frac{\text{Sin}[t]}{t} + \frac{3}{4} \frac{\text{Sin}[t - \pi]}{t - \pi} + \frac{\text{Sin}[t - 2 \pi]}{t - 2 \pi},$ 
{t, -6 \pi, 6 \pi}, PlotStyle -> {Thick} ]
```



Ejemplos de muestreo de funciones

Ejemplo 1

La función $f(t) = \frac{1-\cos t}{t}$ es real e impar. Si bien no es integrable, existe la transformada de Fourier

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos t}{t} e^{-i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos t}{t} (-i \sin \omega t) dt = -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega t}{t} dt + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos t \sin \omega t}{t} dt \\ &= -i \operatorname{sg}(\omega) + i \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t(1+\omega) - \sin t(1-\omega)}{t} dt = -i \pi \operatorname{sg}(\omega) + i \frac{\pi}{2} \{ \operatorname{sg}(1+\omega) - \operatorname{sg}(1-\omega) \} \end{aligned}$$

Luego

$$\hat{f}(\omega) = \begin{cases} -i\pi \operatorname{sg}(\omega) & \text{si } |\omega| < 1 \\ 0 & \text{si } |\omega| > 1 \end{cases}$$

Vemos que es de banda limitada. La condición de Nyquist da un paso T con $1 = \omega_0 \leq \frac{\pi}{T}$ o sea $T \leq \pi$.

Tomando $T = \pi$, veamos cómo se reconstruye la función con la muestra. El muestreo es

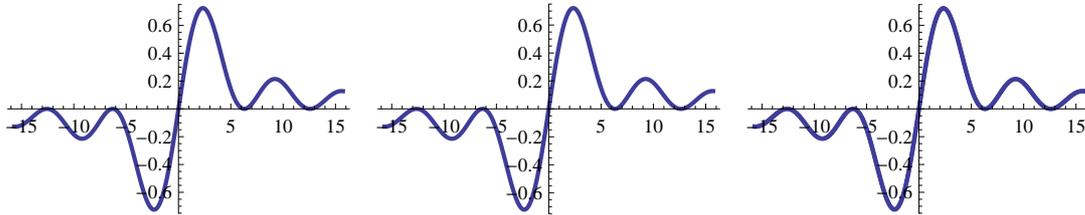
$$\left\{ \dots, -\frac{2}{5\pi}, 0, -\frac{2}{3\pi}, 0, -\frac{2}{\pi}, 0, \frac{2}{\pi}, 0, \frac{2}{3\pi}, 0, \frac{2}{5\pi}, \dots \right\}$$

Sumamos 20 funciones de muestreo positivas y negativas $f(kT) \frac{\sin(t-kT)}{t-kT}$ y vemos que casi coincide con $f(t)$.

```

g1 = Plot[ $\frac{1 - \text{Cos}[t]}{t}$ , {t, -5 π, 5 π}, PlotStyle -> {Thick}];
g2 = Plot[ $\sum_{k=-20}^{20} \frac{2}{(2k+1)\pi} \frac{\text{Sin}[t - \pi(2k+1)]}{t - \pi(2k+1)}$ , {t, -5 π, 5 π}, PlotStyle -> {Thick}];
GraphicsGrid[{{g1, g2, Show[g1, g2]}}]

```



Ejemplo 2

La derivada de la función $f(t) = \frac{1-\cos t}{t}$ es real y par y también tiene espectro de banda limitado.

En efecto, la transformada $\mathcal{F}(f')(\omega)$ es imaginaria pura y par y vale

$$\mathcal{F}(f')(\omega) = (i\omega) \hat{f}(\omega) = \pi \omega \text{sg}(\omega) \Pi_{[-1,1]}(\omega)$$

Además $f'(t) = \frac{\text{sen } t}{t} - \frac{(1-\cos t)}{t^2}$ y entonces

$$\mathcal{F}\left(\frac{1-\cos t}{t^2}\right)(\omega) = \pi \Pi_{[-1,1]}(\omega) - \pi \omega \text{sg}(\omega) \Pi_{[-1,1]}(\omega) = \pi \Lambda(\omega)$$

y tiene también banda limitada. Muestreamos la función $\frac{1-\cos t}{t^2}$ con paso $T = \pi$ y la reconstruimos.

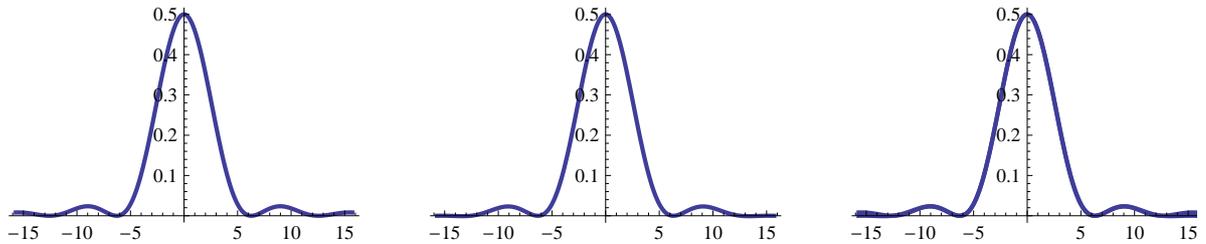
Mostramos el gráfico de la función, de la reconstrucción, y de ambos superpuestos.

```

g1 = Plot[ $\frac{1 - \text{Cos}[t]}{t^2}$ , {t, -5 π, 5 π}, PlotStyle -> {Thick}, PlotRange -> All];
g2 = Plot[ $\frac{1}{2} \frac{\text{Sin}[t]}{t} + \frac{2}{\pi^2} \frac{\text{Sin}[t - \pi]}{t - \pi} + \frac{2}{(3 \pi)^2} \frac{\text{Sin}[t - 3 \pi]}{t - 3 \pi} + \frac{2}{\pi^2} \frac{\text{Sin}[t + \pi]}{t + \pi} +$   

 $\frac{2}{(3 \pi)^2} \frac{\text{Sin}[t + 3 \pi]}{t + 3 \pi}$ , {t, -5 π, 5 π}, PlotRange -> All, PlotStyle -> {Thick}];
GraphicsGrid[{{g1, g2, Show[g1, g2]}}]

```



Ejemplo 3

La función $f(t) = \frac{\text{sen } t}{t}$ es real y par y tiene espectro de banda limitado: $\hat{f}(\omega) = \pi \prod_{[-1,1]}(\omega)$

Tomamos $T = \frac{\pi}{\omega_0} = \pi$. La muestra es $\{ \dots, 0, 0, 1_0, 0, 0, \dots \}$ y se reconstruye con ella misma.

Ejemplo 4

Si una función no es integrable pero es temperada con espectro de banda limitado en $-\omega_0 \leq \omega \leq \omega_0$, el paso T debe verificar la desigualdad estricta $T < \frac{\pi}{\omega_0}$.

Esto es evidente para la función $f(t) = \text{sen } t$ que tiene $\hat{f}(\omega) = i\pi \{\delta(\omega + 1) - \delta(\omega - 1)\}$ y $\omega_0 = 1$.

Si tomamos $T = \pi$ el muestreo da $f(kT) = 0$ y naturalmente con este muestreo no se puede reconstruir la función.

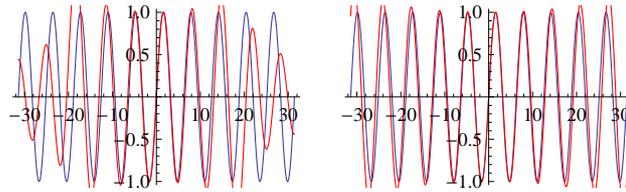
Si tomamos el paso menor $T = \pi/2$, la muestra es

$$\{ \dots, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots \}$$

y con ella reconstruimos $\text{sen } t$ paulatinamente.

```

g1 = Plot[Sin[t], {t, -10 π, 10 π}];
g2 = Plot[Sum[(-1)^k (Sin[t - (2 k + 1) π/2] / (t - (2 k + 1) π/2) - Sin[t + (2 k + 1) π/2] / (t + (2 k + 1) π/2)), {k, 0, 5}], {t, -10 π, 10 π}, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0]];
g3 = Plot[Sum[(-1)^k (Sin[t - (2 k + 1) π/2] / (t - (2 k + 1) π/2) - Sin[t + (2 k + 1) π/2] / (t + (2 k + 1) π/2)), {k, 0, 10}], {t, -10 π, 10 π}, PlotStyle -> RGBColor[1, 0, 0]];
GraphicsGrid[{{Show[g1, g2], Show[g1, g3]}}]
    
```



APÉNDICE I

Sea $g(t) = \frac{1}{T} \frac{\text{sen } \frac{\pi}{T} t}{\frac{\pi}{T} t}$ y $g_k(t) = g(t - kT)$.

Se tiene

$$\hat{g}_k(\omega) = e^{-ikT\omega} G_{\frac{2\pi}{T}}(\omega)$$

Para $k \neq l$:

$$\langle g_k(t), g_l(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g_k(t) \overline{g_l(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_k(\omega) \overline{\hat{g}_l(\omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} e^{-ikT\omega} e^{ilT\omega} d\omega = 0$$

y para $k = l$:

$$\langle g_k(t), g_k(t) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} d\omega = \frac{1}{T}$$

Luego $\sqrt{T} g_k(t)$ es un conjunto ortonormal. El subespacio "generado" es justamente el de funciones de banda acotada entre $-\frac{\pi}{T}$ y $\frac{\pi}{T}$: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \sqrt{T} g_k(t)$.

Si $f(t)$ tiene banda acotada entre $-\frac{\pi}{T}$ y $\frac{\pi}{T}$: $\hat{f}(\omega) = 0$ para $|\omega| > \frac{\pi}{T}$

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sqrt{T} \overline{g_k(t)} dt = \frac{\sqrt{T}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}_k(\omega)} d\omega = \frac{\sqrt{T}}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} \hat{f}(\omega) e^{ikT\omega} d\omega = \sqrt{T} f(kT)$$

$$f(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) g_k(t) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \frac{1}{T} \frac{\text{sen} \frac{\pi}{T}(t-kT)}{\frac{\pi}{T}(t-kT)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \frac{\text{sen} \frac{\pi}{T}(t-kT)}{\frac{\pi}{T}(t-kT)}$$

APÉNDICE II Sobre el cálculo de residuos

Desde el punto de vista del cálculo, el residuo de una función $f(z)$ en una singularidad aislada a es el coeficiente de la potencia $(z - a)^{-1}$ en el desarrollo de Laurent alrededor de a , es decir, si

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - a)^k \Rightarrow \text{Res}_{z=a}(f) = a_{-1}$$

Cuando la singularidad es un polo, se puede intentar encontrar ese coeficiente escribiendo:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^r}$$

con $g(z)$ analítica en a . Observamos que si $g(a) \neq 0$ el polo es de orden r .

Desarrollando en Taylor $g(z)$ hasta orden $r - 1$

$$g(z) = g(a) + g'(a)(z - a) + \frac{1}{2!} g''(a)(z - a)^2 + \dots + \frac{1}{(r-1)!} g^{(r-1)}(a)(z - a)^{r-1} + \dots$$

se tiene el desarrollo de Laurent de $f(z)$ con centro en a

$$f(z) = \frac{g(a)}{(z-a)^r} + \frac{g'(a)}{(z-a)^{r-1}} + \frac{1}{2!} \frac{g''(a)}{(z-a)^{r-2}} + \dots + \frac{1}{(r-1)!} \frac{g^{(r-1)}(a)}{z-a} + \dots$$

que nos da

$$\text{Res}_{z=a}(f) = \frac{1}{(r-1)!} g^{(r-1)}(a)$$

Esta es la fórmula básica para el cálculo de residuos.

A veces se presenta así:

$$\text{Res}_{z=a}(f) = \frac{1}{(r-1)!} \lim_{z \rightarrow a} [(z-a)^r f(z)]^{(r-1)}$$

Situación 1 Polo simple

Si la función tiene la expresión $f(z) = \frac{g(z)}{z-a}$ entonces $\text{Res}_{z=a} f = g(a)$

Observemos que si $g(a) = 0$, no hay polo, pues f resulta analítica en a

Ejemplos a) Para calcular $\text{Res}_{z=0} \left(\frac{2+z}{\text{sen } z} \right)$ escribimos

$$\frac{2+z}{\text{sen } z} = \frac{2+z}{z - \frac{1}{3!}z^3 + \dots} = \frac{2+z}{z(1 - \frac{1}{3!}z^2 + \dots)} = \frac{g(z)}{z} \Rightarrow \text{Res}_{z=0} \left(\frac{2+z}{\text{sen } z} \right) = g(0) = 2$$

b) Para calcular $\text{Res}_{z=1} \frac{e^{-z}}{z^3-1}$ factorizamos $z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1)$

$$\frac{e^{-z}}{z^3-1} = \frac{e^{-z}}{(z-1)(z^2+z+1)} = \frac{g(z)}{z-1} \Rightarrow \text{Res}_{z=1} \frac{e^{-z}}{z^3-1} = g(1) = \frac{e^{-1}}{3}$$

c) Si $f(z) = \frac{1}{g(z)}$ con $g(z)$ analítica con un cero simple en a probar que

$$\text{Res}_{z=a} \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{g'(a)}$$

d) Calcular $\text{Res}_{z=-1} \frac{\text{sen } z}{z^3+1}$, $\text{Res}_{z=-1} \frac{z}{z^5+1}$, $\text{Res}_{z=\pi} \frac{z^2+z-2}{\text{sen } z}$

Situación 2 Polo doble

Si la expresión es $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^2}$, con $g(z)$ analítica en a , la desarrollamos en Taylor y queda

$$f(z) = \frac{g(a)}{(z-a)^2} + \frac{g'(a)}{z-a} + \dots \Rightarrow \text{Res}_{z=a} f = g'(a)$$

Observamos que si $g(a) \neq 0$ el polo es doble pero si $g(a) = 0$ y $g'(a) \neq 0$ el polo es simple. En cualquier caso, la fórmula anterior da el residuo.

Ejemplos a) Para calcular $\text{Res}_{z=0} \frac{e^{-2z}}{\text{sen}^2 z}$ escribimos

$$\frac{e^{-2z}}{\text{sen}^2 z} = \frac{e^{-2z}}{\left(z - \frac{1}{3!}z^3 + \dots\right)^2} = \frac{e^{-2z}}{z^2\left(1 - \frac{1}{6}z^2 + \dots\right)^2} = \frac{g(z)}{z^2} \quad \text{con } g(z) = \frac{e^{-2z}}{\left(1 - \frac{1}{6}z^2 + \dots\right)^2}$$

y derivando obtenemos $\text{Res}_{z=0} \frac{e^{-2z}}{\text{sen}^2 z} = g'(0) = -4$

b) Para calcular $\text{Res}_{z=0} \frac{1-z \cos z}{\text{sen}^2 z}$ escribimos

$$\frac{1-z \cos z}{\text{sen}^2 z} = \frac{1-z\left(1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - \dots\right)}{z^2\left(1 - \frac{1}{6}z^2 + \dots\right)^2} = \frac{1-z + \frac{z^3}{2!} - \dots}{z^2\left(1 - \frac{1}{6}z^2 + \dots\right)^2} = \frac{g(z)}{z^2}$$

Luego $\text{Res}_{z=0} \frac{1-\cos z}{\text{sen}^2 z} = g'(0) = -1$

c) Si $f(z) = \frac{1}{h(z)}$ con $h(z)$ analítica en a con un cero doble entonces $h(a) = h'(a) = 0$ y $h''(a) \neq 0$ y

$$\frac{1}{h(z)} = \frac{1}{(z-a)^2\left(\frac{1}{2!}h''(a) + \frac{1}{3!}h'''(a)(z-a) + \dots\right)} = \frac{g(z)}{(z-a)^2} \Rightarrow \text{Res}_{z=a} \frac{1}{h(z)} = g'(a) = \frac{-\frac{1}{3!}h'''(a)}{\left(\frac{1}{2!}h''(a)\right)^2}$$

No es útil recordar esta fórmula pero si el método.

d) Calcular $\text{Res}_{z=-1} \left[\frac{1}{(z^3+1)^2} \right]$ y $\text{Res}_{z=0} \left[\frac{1}{z \text{tg } z} \right]$

Situación 3 Las mismas ideas valen en general

Para calcular $\text{Res}_{z=1} \frac{1}{(z^3-1)^3}$ escribimos

$$\frac{1}{(z^3-1)^3} = \frac{1}{(z-1)^3(z^2+z+1)^3} = \frac{g(z)}{(z-1)^3}$$

donde $g(z) = (z^2+z+1)^{-3}$; $z=1$ es un polo triple pues $g(1) \neq 0$.

Trabajosamente pero en forma metódica calculamos $g''(1)$ y

$$\text{Res}_{z=1} \frac{1}{(z^3-1)^3} = \frac{1}{2!} g''(1) = \frac{1}{2!} \left(\frac{10}{27} \right) = \frac{5}{27}$$

Usamos el programa para hacer el cálculo.

$$g[z_] := (z^2 + z + 1)^{-3}$$

$$\{g'[z], g''[z], g'''[1]\}$$

$$\left\{ -\frac{3(1+2z)}{(1+z+z^2)^4}, \frac{12(1+2z)^2}{(1+z+z^2)^5} - \frac{6}{(1+z+z^2)^4}, \frac{10}{27} \right\}$$

Por otro lado, el mismo programa calcula el residuo en forma exacta.

$$\text{Residue}\left[\frac{1}{(z^3 - 1)^3}, \{z, 1\}\right]$$

$$\frac{5}{27}$$

Calculo de residuos en forma aproximada

Cuando un polo se calcula por métodos numéricos, el cálculo es inexacto y no se puede aplicar el método desarrollado anteriormente.

Por ejemplo:

Calculamos $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+x+1} dx$ mediante un semicírculo en el semiplano superior obteniendo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4+x+1} dx = 2\pi i \sum_{\text{Im}(z_i) > 0} \text{Res}_{z_i} \left(\frac{1}{z^4+z+1} \right)$$

Para ver si $f(z) = \frac{1}{z^4+z+1}$ tiene polos en el semiplano superior calculamos los ceros del denominador.

$$\text{NSolve}[z^4 + z + 1 == 0, z]$$

$$\{\{z \rightarrow -0.727136 - 0.430014 i\}, \{z \rightarrow -0.727136 + 0.430014 i\}, \{z \rightarrow 0.727136 - 0.934099 i\}, \{z \rightarrow 0.727136 + 0.934099 i\}\}$$

Se ven dos polos simples $z_1 \approx -0.727 + 0.430 i$ y $z_2 \approx 0.727 + 0.934 i$

¿Cómo calcular los residuos en esos polos ?

Si integramos el desarrollo de Laurent de $f(z)$ en a a lo largo de una circunferencia de radio r pequeño obtenemos:

$$\int_{|z-a|=r} f(z) dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{|z-a|=r} (z-a)^k dz = c_{-1} 2\pi i = 2\pi i \text{Res}_{z=a} f$$

Cuando el número a se conoce en forma aproximada, el programa *Mathematica* utiliza el cálculo aproximado de la integral para evaluar el residuo:

$$\text{Res}_{z=a} f = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} f(z) dz$$

En nuestro ejemplo tenemos:

$$z_1 \approx -0.727 + 0.430 i \quad \text{y} \quad z_2 \approx 0.727 + 0.934 i$$

`<<NumericalMath`NResidue``

$$2 \pi i \text{NResidue} \left[\frac{1}{z^4 + z + 1}, \{z, -0.727 + 0.430 i\} \right]$$

$$2.17388 + 0.970161 i$$

$$2 \pi i \text{NResidue} \left[\frac{1}{z^4 + z + 1}, \{z, 0.727 + 0.934 i\} \right]$$

$$0.509664 - 0.970161 i$$

$$\%24 + \%28$$

$$2.68355 - 6.66134 \times 10^{-15} i$$

Comparamos este resultado: 2.68355 con el cálculo numérico de la integral

$$\text{NIntegrate} \left[\frac{1}{x^4 + x + 1}, \{x, -100, 100\} \right]$$

$$2.68354$$

Uso de los residuos para el cálculo de integrales

Elegir en forma adecuada una región acotada que depende de uno o más números, tal que integrando en una parte de su borde nos aproxime la integral, en otras la integral se conozca y en las desconocidas tienda a cero.

Ejemplo

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^3 + 1} dx$$

Sea el sector angular $\Omega_R = \{z : 0 < \text{Arg}[z] < \frac{2}{3} \pi, |z| < R\}$. Hay un polo simple de $\frac{1}{z^3 + 1}$ en $z_0 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3} i)$

Por el teorema de los residuos $\int_{\partial \Omega_R} \frac{1}{z^3 + 1} dz = 2 \pi i \text{Res}_{z_0} \left(\frac{1}{z^3 + 1} \right) = 2 \pi i \frac{1}{3 z_0^2}$

Su borde $\partial \Omega_R$ está compuesto de dos segmentos y un arco circular:

$$\begin{aligned} I_1 : & \quad z_1(t) = t, \quad 0 \leq t \leq R && \text{positivo} \\ I_2 : & \quad z_2(t) = z_0^2 t, \quad 0 \leq t \leq R && \text{negativo} \\ C_R : & \quad z_3(\theta) = R(\cos \theta + i \sin \theta) && \text{positivo} \end{aligned}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{1}{z^3 + 1} dz = 0 \quad ; \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{I_1} \frac{1}{z^3 + 1} dz = \int_0^{\infty} \frac{1}{t^3 + 1} dt = I \quad \text{y}$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{I_2} \frac{1}{z^3 + 1} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{1}{(z_0^2 t)^3 + 1} z_0^2 dt = z_0^2 \int_0^{\infty} \frac{1}{t^3 + 1} dt = z_0^2 I$$

$$\text{Luego} \quad (1 - z_0^2) I = 2 \pi i \frac{1}{3 z_0^2} \Rightarrow I = \frac{2 \pi i}{3(z_0^2 + z_0)} = \frac{2 \pi i}{3 \sqrt{3} i} = \frac{2 \pi}{3 \sqrt{3}}$$

Comparamos este valor con el cálculo aproximado de la integral.

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} // N$$

1.2092

$$\text{NIntegrate}\left[\frac{1}{t^3 + 1}, \{t, 0, 40\}\right]$$

1.20889

EJERCICIOS

1. Determinar la transformada de Fourier de las siguientes funciones y, mediante la fórmula de inversión, describir la aproximación armónica.

a) $e^{-at} u(t)$, $a > 0$

b) $e^{-a|t|}$, $a > 0$

c) $\frac{1}{a^2 + t^2}$, $\frac{t}{(t^2 + 1)^2}$

d) $e(t)$, $\Pi_{[-1,1]}(t)$, $t e(t)$

e) $\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \Pi_{[-1,1]}(t)$

f) $\Lambda(t)$ y $\Lambda'(t)$

2. Sea $f(t)$ absolutamente integrable en \mathbb{R} .

a) Si $f(t)$ es par probar que $\hat{f}(\omega) = 2 \int_0^\infty f(t) \cos \omega t dt$

b) Si $f(t)$ es impar probar que $\hat{f}(\omega) = -2i \int_0^\infty f(t) \sin \omega t dt$

c) Si $f(t)$ es real y par entonces $\hat{f}(\omega)$ es real y par y $\varphi(\omega) = 0$ ó π

d) Si $f(t)$ es real e impar entonces $\hat{f}(\omega)$ es imaginaria pura e impar y $\varphi(\omega) = \pm \frac{\pi}{2}$

Comprobar estas propiedades con las funciones del ejercicio 1 que correspondan.

3. a) Sea $f(t)$ una onda coseno de duración finita $f(t) = \begin{cases} \cos at & \text{si } -M < t < M \\ 0 & \text{si } |t| > M \end{cases}$

Calcular su transformada de Fourier y observar qué ocurre cuando $M \rightarrow \infty$

b) Hacer lo propio con una onda seno de duración finita.

4. Sea $f(t)$ real y absolutamente integrable en \mathbb{R}

a) Mostrar que $\overline{\hat{f}(\omega)} = \hat{f}(-\omega)$ y concluir que $A(\omega)$ es par y $\varphi(\omega)$ es impar.

b) Deducir que en cada punto t_0 donde $f(t)$ es derivable vale la fórmula de inversión

$$f(t_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty A(\omega) \cos[\omega t_0 + \varphi(\omega)] d\omega$$

c) Para las funciones del ejercicio 1, hallar $A(\omega)$ y $\varphi(\omega)$ y expresarlas mediante b)

5. Sobre las propiedades. Expresar las transformadas siguientes en términos de $\mathcal{F}(f)$:

- a) $\mathcal{F}(f(t-a))$ "traslación en el tiempo"
- b) $\mathcal{F}(f(kt))$, $k > 0$, "reescalamiento en el tiempo"
- c) $\mathcal{F}(f(-t))$ "inversión en el tiempo"
- d) $\mathcal{F}(f(t)e^{ibt})$ "traslación en frecuencias"

6. Aplicar las reglas del ejercicio anterior a:

$$\mathcal{F}(e^{kt}); \mathcal{F}(\Lambda(t-a)); \mathcal{F}(e^{-t}); \mathcal{F}(e^{t-a})$$

7. a) Escribir la relación entre $\mathcal{F}(f)$ y $\mathcal{F}(f')$ y comprobarla para $\Lambda(t)$ y $e^{-at}u(t)$

b) Comprobar las siguientes igualdades que ilustran distintas propiedades de la transformada de Fourier

$$\mathcal{F}(e * e) = \mathcal{F}(e)^2$$

$$\mathcal{F}(\Pi_{[-1,0]} * \Pi_{[0,1]}) = \mathcal{F}(\Pi_{[-1,0]})\mathcal{F}(\Pi_{[0,1]})$$

$$\mathcal{F}(\Lambda' * \Lambda') = \mathcal{F}(\Lambda')^2 = -\omega^2 \mathcal{F}(\Lambda)^2$$

$$\mathcal{F}(e^{-2t}u(t)) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(e^{-t}u(t)) * \mathcal{F}(e^{-t}u(t))$$

8. Calcular la transformada de Fourier de $\frac{1}{t^2+2t+2}$ y de $\frac{1}{1+t^4}$ usando residuos y comprobar la fórmula de inversión.

9. a) Sea la gaussiana normalizada $g_a(t) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2a^2}}$, $a > 0$

$$\text{Probar que } \int_{-\infty}^{\infty} g_a(t) dt = 1 \quad \text{y que } \hat{g}_a(\omega) = e^{-\frac{1}{2}a^2\omega^2}$$

b) Usando a) probar que la convolución de dos gaussianas es otra gaussiana:

$$g_a * g_b = g_c \quad \text{donde } a^2 + b^2 = c^2$$

c) En general, las gaussianas trasladadas verifican

$$g_a(t - \alpha) * g_b(t - \beta) = g_c(t - \gamma) \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \gamma = \alpha + \beta \\ c^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$$

Sugerencia:

Usar que si $g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$, se sabe que $\hat{g}(\omega) = e^{-\frac{1}{2}\omega^2}$. Hacer cambios de escalas.

10. a) Calcular $\mathcal{F}\left(\frac{\text{sen } at}{t}\right)$

Sugerencia. Escribir $\text{sen } \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta)]$

b) Sea $\hat{f}(\omega) = 0$ para $|\omega| > \omega_0 > 0$ en cuyo caso decimos que tiene banda limitada.

Probar que si $a > \omega_0$ entonces

$$f(t) * \frac{\text{sen } at}{t} = \pi f(t)$$

11. Hallar una fórmula para $\mathcal{F}[f(t+a) + f(t-a)]$

12. Para $x'' + 4x' + 3x = f' + 2f$ buscar la salida causal.

a) Mediante la Transformada de Fourier hallar la respuesta al impulso unitario.

b) Por convolución y por transformada de Fourier, hallar la respuesta a $f(t) = e^{-t} u(t)$

13. Mostrar que la función $f(t) = \frac{1 - \cos t}{t}$ no es integrable e impar pero, como función generalizada tiene transformada de Fourier dada por $\hat{f}(\omega) = i\pi \{ \Pi_{(-1,0)}(\omega) - \Pi_{(0,1)}(\omega) \}$ que es impar e imaginaria pura. Comprobar la fórmula de inversión.

14. Sea $f(t) = \text{sat}(t)$ la "función saturación"

a) Calcular $\mathcal{F}(f')$ y obtener gráficamente la aproximación armónica de $f'(t)$

b) Comprobar la fórmula $\mathcal{F}(f')(\omega) = i\omega \mathcal{F}(f)$ (usar la transformada del escalón).

c) Utilizando las propiedades de la transformada de Fourier, calcular $\mathcal{F}(f'')$ y obtener las aproximaciones armónicas correspondientes.

15. Sea la aproximación del $\cos \omega_0 t = \lim_{M \rightarrow \infty} \prod_{[-M,M]}(t) \cos \omega_0 t$

Calcular, mediante esta aproximación, la transformada de Fourier de $\cos \omega_0 t$ y ver que coincide con la dada en el texto.

16. Calcular la transformada de Fourier de:

a) $u(t-1)$ usando la propiedad del corrimiento en t .

b) $\sin^2 t$, $\sin^3 t$ y $\sin^2 t \cos t$ hallando sus desarrollos armónicos mediante

$$\sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}) \text{ y } \cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$$

c) $e^{i\omega_0 t} u(t)$ usando la propiedad de corrimiento en ω .

d) $\sin(\omega_0 t) u(t)$ y $\cos(\omega_0 t) u(t)$ usando c).

e) $f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t \leq -1 \\ \sin \frac{\pi}{2} t & \text{si } -1 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$ descomponiéndola en suma de funciones adecuadas.

17. a) Sea $F(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = f * u$ la primitiva de $f(t)$ que vale 0 en $-\infty$.

Calcular \hat{F} en términos de \hat{f} .

b) Aplicar la parte a) a la función $f(t) = \Lambda(t)$ y hacer todas las gráficas.

18. Usando Fourier hallar la transformada de Laplace inversa de $\frac{1}{1+z}$ (usar residuos).

19. Utilizando la igualdad de Parseval demostrar que

$$\text{a) } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^2} dt = \frac{\pi}{2} \quad \text{b) } \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt = \pi \quad \text{c) } \int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-t} dt = \frac{\pi}{4}$$

20. Comprobar las igualdades y graficar todas las funciones que aparecen:

$$\text{a) } \mathcal{F}(\Pi_{[-1,1]}(t) \cos \frac{\pi}{2} t) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(\Pi_{[-1,1]}(t)) * \mathcal{F}(\cos \frac{\pi}{2} t)$$

$$\text{b) } \mathcal{F}(\Pi_{[0,1]} * u) = \mathcal{F}(\Pi_{[0,1]}) \cdot \mathcal{F}(u)$$

21. Comprobar las igualdades

$$\text{sat}(2t) = e\left(t + \frac{1}{2}\right) * \text{sg}(t) \quad \text{y} \quad \mathcal{F}(\text{sat}(2t)) = \mathcal{F}\left(e\left(t + \frac{1}{2}\right)\right) \mathcal{F}(\text{sg}(t))$$

22. Hallar la transformada de Fourier de $t \text{sg}(t)$ y comprobar la fórmula de inversión

23. Si $f(t)$ tiene banda limitada $-5000 \text{ herz} < \omega < 5000 \text{ hertz}$,
¿cómo hay que muestrearla para poder recuperarla desde la muestra?

24. Hallar la función cuya transformada es $\hat{f}(\omega) = e^{-i\gamma\omega} \Pi_{[-a,a]}(\omega)$ y tiene banda limitada.

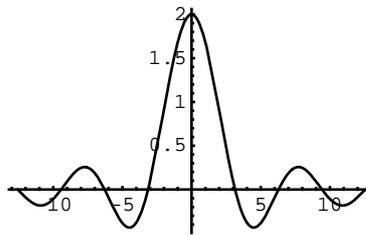
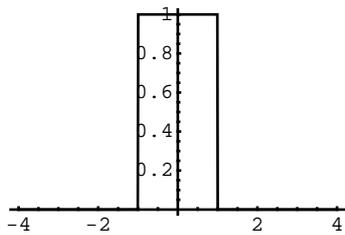
TABLA DE TRANSFORMADAS DE FOURIER

1.	$\Pi_{[-a,a]}(t)$	$\frac{2 \text{ sen } a \omega}{\omega}$
2.	$\Lambda(t)$	$2 \left(\frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} \right)$
3.	$\frac{1}{\pi} \frac{\text{sen } at}{t}$	$\Pi_{[-a,a]}(\omega)$
4.	$t^n e^{-at} u(t) \quad \text{Re}(a) > 0$	$\frac{n!}{(a + i\omega)^{n+1}}$
5.	$t^n e^{at} u(-t) \quad \text{Re}(a) > 0$	$\frac{(-1)^n n!}{(a - i\omega)^{n+1}}$
6.	$e^{-a t } \quad \text{Re}(a) > 0$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
7.	$e^{-\frac{1}{2}t^2}$	$\sqrt{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\omega^2}$
8.	$\delta(t)$	1
9.	1	$2\pi \delta(\omega)$

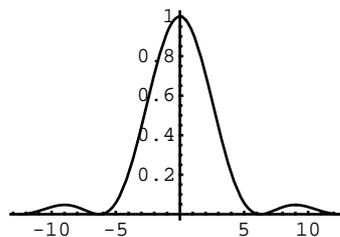
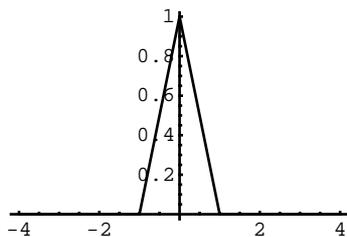
- 10. $u(t)$ $\frac{1}{i\omega} + \pi \delta(\omega)$
- 11. $sg(t)$ $\frac{2}{i\omega}$
- 12. $\delta(t - t_0)$ $e^{-i t_0 \omega} = \cos t_0 \omega - i \text{sen } t_0 \omega$
- 13. $e^{i \omega_0 t}$ $2 \pi \delta(\omega - \omega_0)$
- 14. $\cos \omega_0 t$ $\pi \{ \delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0) \}$
- 15. $\text{sen } \omega_0 t$ $i \pi \{ \delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0) \}$
- 16. $\frac{1}{t}$ $-i \pi \text{sg}(\omega)$
- 17. $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-i \omega_0 t}$ $2 \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - k \omega_0)$
- 18. $\Pi_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k T)$ $\Pi_{\frac{2\pi}{T}}(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k \frac{2\pi}{T})$

TABLA DE TRANSFORMADAS DE FOURIER

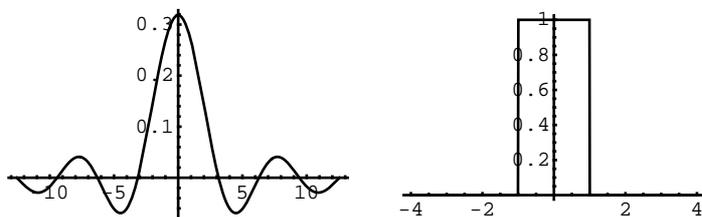
- 1. $\Pi_{[-a, a]}(t)$ $\frac{2 \text{sen } a \omega}{\omega}$



- 2. $\Lambda(t)$ $2 \left(\frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} \right)$



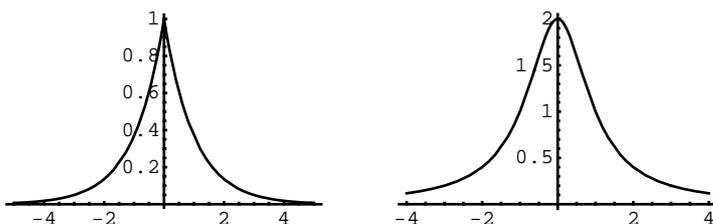
3. $\frac{1}{\pi} \frac{\text{sen } at}{t}$ $\Pi_{[-a,a]}(\omega)$



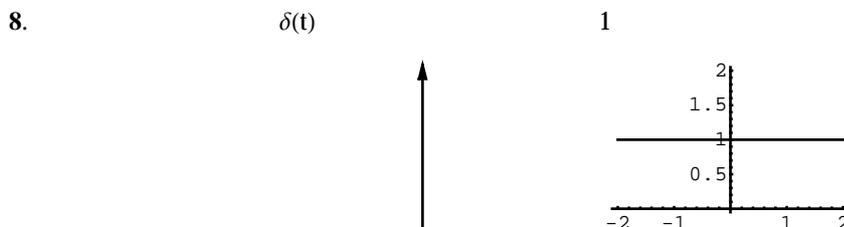
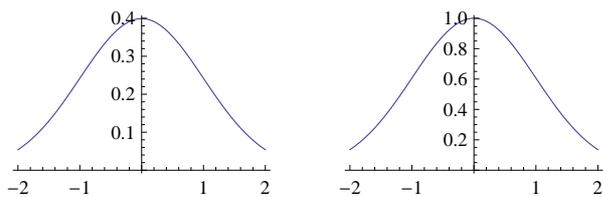
4. $t^n e^{-at} u(t)$ $\text{Re}(a) > 0$ $\frac{n!}{(a+i\omega)^{n+1}}$

5. $t^n e^{at} u(-t)$ $\text{Re}(a) > 0$ $\frac{(-1)^n n!}{(a-i\omega)^{n+1}}$

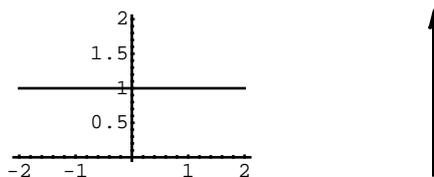
6. $e^{-a|t|}$ $\text{Re}(a) > 0$ $\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$



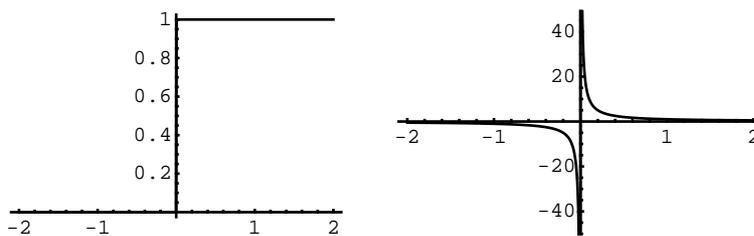
7. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$ $e^{-\frac{1}{2}\omega^2}$



9. 1 $2\pi \delta(\omega)$



10. $u(t) \quad p v \left(\frac{1}{i\omega} \right) + \pi \delta(\omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\epsilon + i\omega}$

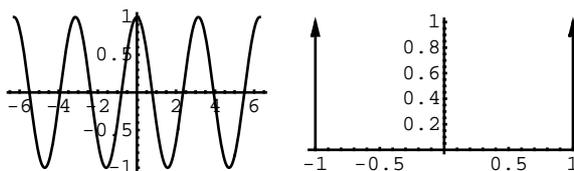


11. $sg(t) \quad p v \left(\frac{2}{i\omega} \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{-2i\omega}{\epsilon^2 + \omega^2}$

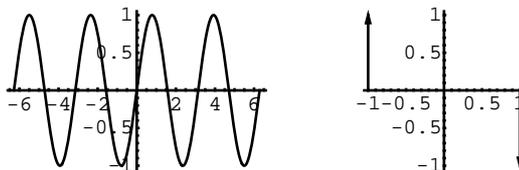
12. $\delta(t - t_0) \quad e^{-i t_0 \omega} = \cos t_0 \omega - i \text{sen } t_0 \omega$

13. $e^{i \omega_0 t} \quad 2 \pi \delta(\omega - \omega_0)$

14. $\cos \omega_0 t \quad \pi \{ \delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0) \}$



15. $\text{sen } \omega_0 t \quad i \pi \{ \delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0) \}$



16. $p.v.\left(\frac{1}{t}\right) \qquad -i\pi \operatorname{sg}(\omega)$

17. $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{-i\omega_0 t} \qquad 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - k\omega_0)$

18. $\Pi_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \qquad \Pi_{\frac{2\pi}{T}}(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - k\frac{2\pi}{T}\right)$

