UNIVERSIDAD NACIONAL DE QUILMES
DEPARTAMENTO DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
MATEMÁTICA AVANZADA

Unidad 5 SEÑALES Y SISTEMAS DISCRETOS. TRANSFORMADA Z.

Señales discretas. Gráficas. Algunos subespacios.
Ecuaciones en diferencias lineales. Solución general de la ecuación homogénea y no homogénea. Condiciones iniciales. Estabilidad interna. Criterio de Schur-Cohn. Discretización de ecuaciones diferenciales. Respuesta al impulso unitario y al escalón. Convolución: cálculo y propiedades. Estabililidad externa. Transformada Z y Z_+: propiedades y cálculo. Aplicaciones. Extensión a sistemas lineales en diferencias. Estabilidad, observabilidad, controlabilidad.

SEÑALES DISCRETAS

Una señal discreta es una sucesión de números $x[n]$, $-\infty < n < \infty$.
El conjunto $\mathfrak{S}$ de señales discretas es un espacio vectorial con las operaciones usuales de suma y producto por números.

Ejemplos

a) La delta discreta $\delta[n] = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \\ 0 \text{ si } n \neq 0 \end{cases}$

b) El escalón unitario $u[n] = \begin{cases} 1 \text{ si } n \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } n < 0 \end{cases}$

c) La rampa discreta $r[n] = \begin{cases} n \text{ si } n \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } n < 0 \end{cases}$

d) Un escalón finito $\prod_{[n_0, n_1]} [n] = \begin{cases} 1 \text{ si } n_0 \leqslant n \leqslant n_1 \\ 0 \text{ en los demás } n \end{cases}$

e) Potencias de un número r real o complejo r^n

Ejercicio

Sean $r_1, \ldots, r_s$ números distintos.
Probar que las sucesiones discretas $r_1{}^n, \ldots, r_s{}^n$ son linealmente independientes.

Atraso o adelanto de señales

Sea $x[n]$ una señal discreta y n_0 un entero.
Entonces $x[n-n_0]$ es un retraso de la señal si $n_0>0$ y un adelanto si $n_0<0$

Ejemplos $\delta[n+1]=\begin{cases} 1 \text{ si } & n=-1 \\ 0 \text{ si } & n\neq -1 \end{cases}$ es el adelanto en 1 de la δ

$u[n-2]=\begin{cases} 1 \text{ si } & n\geqslant 2 \\ 0 \text{ si } & n<2 \end{cases}$ es el atraso del escalón unitario en 2

Ejercicio

Probar que las sucesiones $\delta[n-k]$, $-\infty<k<\infty$, son linealmente independientes.
Describir el subespacio que generan.

Muestreo de funciones

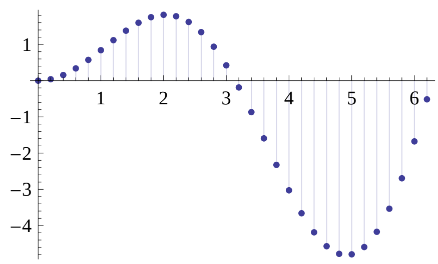
.
Algunas sucesiones discretas aparecen al muestrear funciones $f(t)$ con un paso T : $x[n]=f(nT)$.

Ejemplo

Muestreamos la función x sen x en el intervalo $[0, 2\pi]$ con paso 0.2 y graficamos la muestra.

```
Table[x Sin[x], {x, 0, 2 π, 0.2}]
DiscretePlot[x Sin[x], {x, 0, 2 π, 0.2}]
```

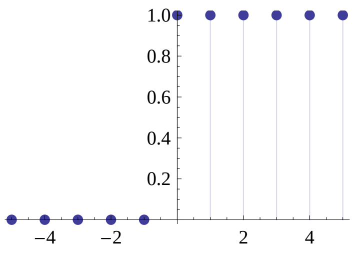
```
{0., 0.0397339, 0.155767, 0.338785, 0.573885, 0.841471, 1.11845, 1.37963, 1.59932,
 1.75293, 1.81859, 1.77869, 1.62111, 1.3403, 0.937967, 0.42336, -0.186797,
 -0.86884, -1.59307, -2.32506, -3.02721, -3.66062, -4.18705, -4.57098, -4.78159,
 -4.79462, -4.59396, -4.17293, -3.53509, -2.69469, -1.67649, -0.515154}
```



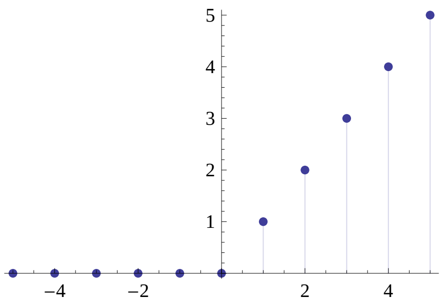
Gráficas

Las señales discretas se grafican con "estambres" como se ve en el ejemplo anterior.

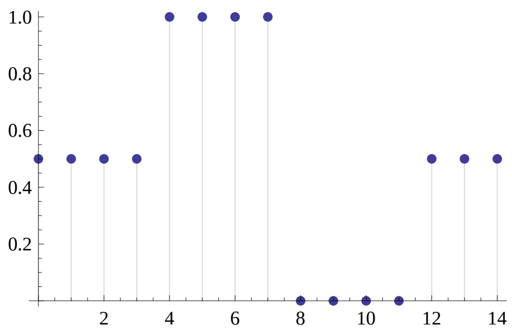
```
DiscretePlot[UnitStep[k], {k, -5, 5}, PlotStyle -> PointSize[0.03]]
```




```
DiscretePlot[k UnitStep[k], {k, -5, 5}, PlotStyle -> PointSize[0.02]]
```



```
x[n_] := Which[4 ≤ n ≤ 7, 1, 8 ≤ n ≤ 11, 0, True, 0.5];
DiscretePlot[x[k], {k, 0, 14}, PlotStyle -> PointSize[0.02]]
```



Señales finitas, causales, acotadas, periódicas y otras

a) Una sucesión $x[n]$ se llama finita si es cero salvo finitos n.
Forman un subespacio que se puede describir así

$$\mathfrak{S}_f = \{\, x[n] \in \mathfrak{S} : \text{ existe } N \text{ tal que } x[n] = 0 \text{ si } |n| > N \,\}.$$

Una base de este subespacio es $\delta[n-k]$, $-\infty < k < \infty$.
Una manera práctica de anotar una sucesión finita es dando la lista ordenada de valores y especificando qué valor toma en el punto 0 mediante un subíndice 0 .

Ejemplo

La sucesión $x = \{1, 0, -3, 4, 2_0, 0, 1\}$ es finita con valor $x[0] = 2$.
Se puede escribir también así

$$x[n] = \delta[n+4] - 3\,\delta[n+2] + 4\,\delta[n+1] + 2\,\delta[n] + \delta[n-2]$$

Un escalón finito $\prod_{[n_0,\, n_1]} [n]$ es una sucesión finita

b) Una sucesión se llama causal si vale 0 en los negativos: $x[n] = 0$ si $n < 0$.
Forman un subespacio

$$\mathfrak{S}_+ = \{\, x[n] : x[n] = 0 \text{ si } n < 0 \,\}.$$

Por ejemplo, $\delta[n]$, $u[n]$, $r[n]$ son causales, pero $\delta[n+1]$, $\{-1, 0, 2_0, 1\}$ no lo son.

c) Una sucesión $x[n]$ se llama acotada si existe un número M tal que $|x[n]| \leq M$.
Las sucesiones acotadas forman un subespacio $\mathfrak{S}_a$.

La sucesiones $\delta[n]$, $\delta[n+1]$, $u[n]$, $2^{-n}u[n]$ son acotadas pero $r[n]$, 2^{-n} no lo son.

d) Decimos que una sucesión $x[n]$ tiene período $p > 0$ si $x[n+p] = x[n]$.
Entonces cualquier múltiplo positivo $k\,p$ es también un período. Más aún se puede considerar el período mínimo. Se tiene el subespacio de las sucesiones periódicas de período p.

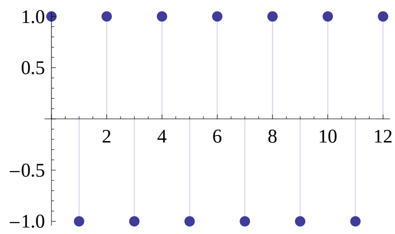
$$\mathfrak{S}_{(p)} = \{\, x[n] \in \mathfrak{S} : \quad x[n+p] = x[p] \,\}$$

Mostrar que tiene dimensión p .

Ejemplos

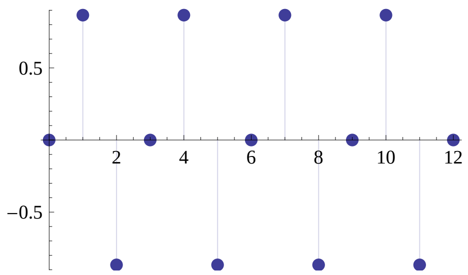
a) $x[n] = (-1)^n$ tiene período mínimo 2

```
DiscretePlot[(-1)^k, {k, 0, 12}, PlotStyle → PointSize[0.03]]
```



b) $x[n] = \text{sen}\left(\frac{2\pi k}{3}\right)$ tiene período mínimo 3

```
DiscretePlot[Sin[2 π k / 3], {k, 0, 12}, PlotStyle → PointSize[0.03]]
```

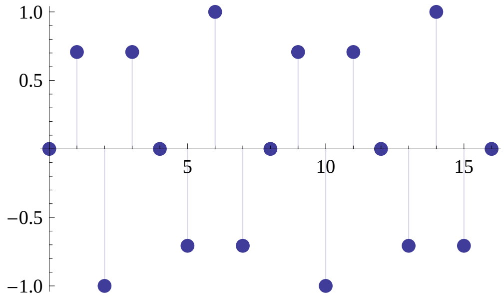


c) $x[n] = \{1_0, 1, -1\} = \delta[n] + \delta[n-1] - \delta[n-2]$ extendida con período 3 se puede escribir

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\,\delta[n-3k] + \delta[n-3k-1] - \delta[n-3k-2]\,)$$

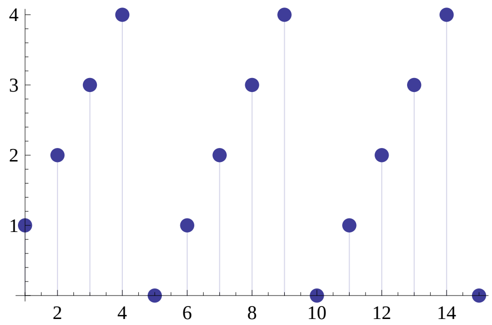
d) $x[n] = \text{sen}\,\frac{3\pi n}{4}$ tiene período mínimo 8 y su gráfica es la que sigue.

```
DiscretePlot[Sin[3 π k / 4], {k, 0, 16}, PlotStyle → PointSize[0.03]]
```

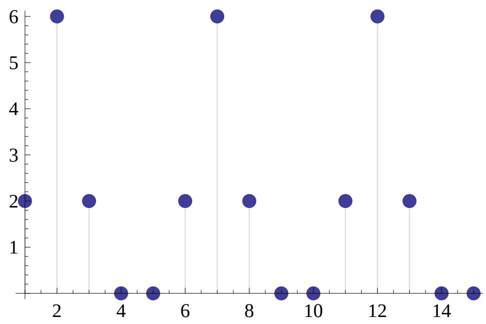


Con la función Mod creamos funciones periódicas

```
DiscretePlot[Mod[n, 5], {n, 15}, PlotStyle → PointSize[0.03]]
```



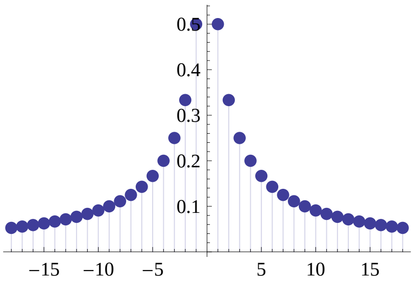

```
DiscretePlot[ Mod[n^2 + n, 10], {n, 15}, PlotStyle → PointSize[0.03]]
```



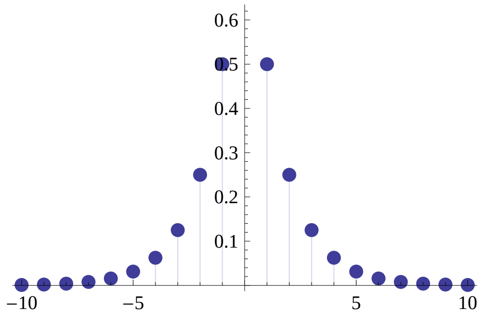
e) Las sucesiones que tienden a cero en el infinito: $\lim_{n\to\pm\infty} x[n] = 0$ forman otro subespacio $\mathfrak{S}_0$.

Por ejemplo: $\frac{1}{|n|+1}$, $2^{-|n|}$, $2^{-n}\, u[n]$.

```
DiscretePlot[1/(1 + Abs[k]), {k, -18, 18}, PlotStyle → PointSize[0.03]]
```



```
DiscretePlot[2^-Abs[k], {k, -10, 10}, PlotStyle → PointSize[0.03]]
```



f) Una sucesión $x[n]$ se llama sumable o l_1 si $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[n]|$ es convergente.
Estas sucesiones forman un subespacio $\mathfrak{S}_1 = l_1$.

Por ejemplo $2^{-n} u[n]$, $2^{-|n|}$ son sumables pero $\frac{1}{n} u[n-1]$ no.

g) Una sucesión $x[n]$ se llama de cuadrado sumable o l_2 o de energía finita si $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$
Estas sucesiones forman un subespacio $\mathfrak{S}_2 = l_2$.

Por ejemplo $\frac{1}{n+1} u[n]$ es de cuadrado sumable pero $\frac{1}{\sqrt{n+1}} u[n]$ no lo es.

Ejercicio

a) Probar que $\mathfrak{S}_f$, $\mathfrak{S}_+$, $\mathfrak{S}_a$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_0$ son subespacios de dimensión infinita

b) Probar las siguientes inclusiones entre subespacios y mostrar que son estrictas:

$$\mathfrak{S}_f \subset \mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_2 \subset \mathfrak{S}_0 \subset \mathfrak{S}_a \quad \text{y} \quad \mathfrak{S}_{(p)} \subset \mathfrak{S}_a$$

c) Describir $\mathfrak{S}_f \cap \mathfrak{S}_+$, $\mathfrak{S}_f + \mathfrak{S}_+$, $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_{(p)}$

Ejercicio

a) Si dos sucesiones $x_1[n]$, $x_2[n]$ tienen períodos eventualmente diferentes p_1 , p_2 probar que una combinación lineal $c_1 x_1[n] + c_2 x_2[n]$ y el producto $x_1[n].x_2[n]$ tienen período $p =$ menor múltiplo común entre p_1 y p_2 .

b) Mostrar que el período mínimo de $(-1)^n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{3}\right)$ es 3 y graficarla.

c) Mostrar que el período mínimo de $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} n\right) - 2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ es 24 y graficarla.

c) Mostrar que el período mínimo de $\operatorname{sen}^2\left(\frac{3}{5}\pi n\right)$ es 5 y el de $\operatorname{sen}^2\left(\frac{3}{5}\pi n\right) \cos\left(\frac{1}{2}\pi n\right)$ es 10.

d) Hallar el período mínimo de $\left|\operatorname{sen}\left(\frac{2}{3}\pi n\right)\right| - \cos n\pi$ y graficar.

Ejercicio

a) Probar que $\mathfrak{S}_2$ es un subespacio que tiene un producto escalar $\langle x[n], y[n] \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]\, \overline{y[n]}$

b) Mostrar que $\frac{\log n}{n}\, u[n-1]$ y $2^{-|n|}$ son de cuadrado sumable pero $\frac{\log n}{\sqrt{n}}\, u[n-1]$ y 2^{-n} no lo son .

Sugerencia para a)
Usar que $|a\, b| \leqslant \frac{1}{2}\left(|a|^2 + |b^2|\right)$ para ver que la serie que define el producto escalar es absolutamente convergente.

ECUACIONES LINEALES EN DIFERENCIAS

Una ecuación en diferencias lineal de orden s es de la forma

$$a_0\, x[n] + a_1\, x[n-1] + \ldots.+ a_s\, x[n-s] = b_0\, d[n] + b_1\, d[n-1] + \ldots + b_r\, d[n-r]$$

donde las a_i y b_j son constantes reales y $a_0 \,.\, a_s \neq 0$.

La sucesión $d[n]$ se llama entrada . Si $d[n] = 0$ la ecuación se llama homogénea.

Una solución es una sucesión $x[n]$ perteneciente a $\mathfrak{S}$ que verifica la igualdad para cada n.

Ejemplo 1

a) $-\frac{2}{3}\, x[n] + x[n-1] = 2^{-n}$ es de primer orden no homogénea

b) $2\, x[n] + x[n-1] - x[n-2] = 0$ es de orden 2 homogénea

c) $-x[n] + \frac{1}{2}\, x[n-1] + \frac{2}{5}\, x[n-3] = 2\, d[n] - d[n-1]$ es de orden 3 no homogénea

Ejemplo 2

$x[n] = \frac{1}{2}[(-1)^n - 1]$ es solución de la ecuación no homogénea $x[n] - x[n-1] = (-1)^n$ pues

$$x[n] - x[n-1] = \frac{1}{2}[(-1)^n - 1] - \frac{1}{2}\left[(-1)^{n-1} - 1\right] = \frac{1}{2}\left[(-1)^n - (-1)^{n-1}\right] = \frac{1}{2}\,(-1)^{n-1}[-1-1] = (-1)^n$$

Ejercicio

a) Comprobar que $x[n] = 2^{-n}$ es solución de la ecuación homogénea $2\, x[n] + x[n-1] - x[n-2] = 0$

b) Comprobar que $x[n] = -\frac{1}{2}\,(-1)^n$ es solución de la ecuación no homogénea $x[n] + 3\, x[n-1] = (-1)^n$

Método de iteración para resolver la ecuación

Sea

$$a_0\, x[n] + a_1\, x[n-1] + ...+a_s\, x[n-s] = d[n]$$

una ecuación lineal de orden s: $a_0 \neq 0$ y $a_s \neq 0$.

Principio básico.
Si se conocen s valores sucesivos de una solución, la solución queda perfectamente determinada.
En efecto, supongamos que conocemos los s valores sucesivos $x[k]$, $x[k+1]$, ..., $x[k+s-1]$.
Como $a_0 \neq 0$ podemos despejar el término $x[k+s]$ de la igualdad

$$a_0\, x[k+s] + a_1\, x[k+s-1] + ...+a_s\, x[k] = d[k+s]$$

Luego iterando podemos conocer $x[k+s+p]$ para todo $p \geqslant 0$.
Por el otro lado, como $a_s \neq 0$ podemos despejar $x[k-1]$ de la igualdad

$$a_0\, x[k+s-1] + a_1\, x[k+s-2] + ...+a_s\, x[k-1] = d[k+s-1]$$

e iterando podemos determinar $x[k-q]$ para cada $q \geqslant 0$.

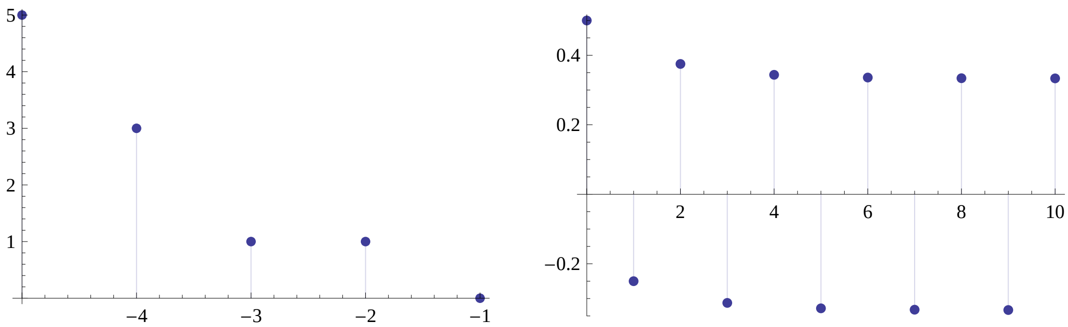
Ejemplo

Consideremos la ecuación de orden 2 homogénea

$$2\, x[n] + x[n-1] - x[n-2] = 0 \quad \text{con} \quad x[-2] = 1,\ x[-1] = 0$$

Calculamos algunos valores de la solución $x[n]$ mediante iteración hacia atrás y hacia adelante.

```
y[k_] := 2 y[k + 2] + y[k + 1]
y[-1] = 0; y[-2] = 1;
x[n_] := 1/2 (-x[n - 1] + x[n - 2])
x[-2] = 1; x[-1] = 0;
g1 = DiscretePlot[y[k], {k, -5, -1}, PlotStyle → PointSize[0.02]];
g2 = DiscretePlot[x[k], {k, 0, 10}, PlotStyle → PointSize[0.02]];
GraphicsGrid[{{g1, g2}}]
```



Ejercicio

Considere la ecuación de orden 1

$$x[n] + x[n-1] = 1 \quad \text{con} \quad x[0] = 0$$

Por iteración halle la solución en el intervalo $[-5, 5]$ y grafíquela. Observe que resulta de período 2 .

Teorema

1. Las soluciones de una ecuación homogénea de orden s forman un subespacio vectorial de $\mathfrak{S}$ de dimensión s.
2. Si x_p es una solución particular de la no homogénea entonces la solución general es $x = x_p + x_0$ con x_0 una solución arbitraria de la homogénea.

Demostración

1. Es fácil comprobar que las soluciones de la homogénea forman un espacio vectorial.
   Demostraremos que tiene dimensión s . Lo hacemos para una ecuación de orden 3 .

   Las condiciones $x[1] = \alpha_1$, $x[2] = \alpha_2$, $x[3] = \alpha_3$ determinan una solución de la ecuación de orden 3

$$a_0\, x[n] + a_1\, x[n-1] + a_2\, x[n-2] + a_3\, x[n-3] = 0$$

   Para los valores consecutivos $x[1] = 1, x[2] = 0$, $x[3] = 0$ sea $x_1[n]$ la solución.
   para $x[1] = 0, x[2] = 1$, $x[3] = 0$ sea $x_2[n]$ la solución

y para $x[1] = 0$, $x[2] = 0$, $x[3] = 1$ sea $x_3[n]$ la solución

a) Veamos que estas 3 soluciones son linealmente independientes.
Si $\alpha_1 x_1[n] + \alpha_2 x_2[n] + \alpha_3 x_3[n] = 0$ es la solución nula
Evaluando en $n = 1$ queda $\alpha_1 = 0$, en $n = 2$ queda $\alpha_2 = 0$, y en $n = 3$ queda $\alpha_3 = 0$-
b) Veamos que generan todas las soluciones. En efecto, sea $x[n]$ una solución y sean
$x[1] = c_1$, $x[2] = c_2$, $x[3] = c_3$ tres de sus valores consecutivos. Entonces la combinación lineal
$c_1 x_1[n] + c_2 x_2[n] + c_3 x_3[n]$ es una solución de la homogénea que toma los mismos tres valores consecutivos que $x[n]$ y por lo tanto son iguales: $x[n] = c_1 x_1[n] + c_2 x_2[n] + c_3 x_3[n]$.

2. Para demostrar este punto basta usar que la diferencia de dos soluciones de la ecuación no homogénea es una solución de la homogénea.

q.e.d.

Base de la ecuación homogénea. Método de Euler

El "método de Euler" permite encontrar una base explícita de la ecuación homogénea.
Para fijar mejor las ideas lo exponemos para una ecuación de orden 3:

$$a_0 x[n] + a_1 x[n-1] + a_2 x[n-2] + a_3 x[n-3] = 0 \quad \text{con} \quad a_0.a_3 \neq 0$$

Buscamos soluciones de tipo exponencial $x[n] = r^n$ con $r \neq 0$. La reemplazamos en la ecuación:

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + a_3 r^{n-3} = 0 = r^{n-3}\left(a_0 r^3 + a_1 r^2 + a_2 r + a_3\right)$$

Como $r \neq 0$ se debe cumplir $a_0 r^3 + a_1 r^2 + a_2 r + a_3 = 0$.
Este polinomio se llama polinomio característico de la ecuación y por ser $a_0 \neq 0$ es de grado 3 .
Tiene tres raíces si las contamos con su multiplicidad y son no nulas pues $a_3 \neq 0$.

Caso 1 Tres raíces distintas.
a) Si las tres son reales r_1, r_2, r_3 obtenemos tres soluciones distintas $r_1{}^n$, $r_2{}^n$, $r_3{}^n$.
Es fácil ver que son linealmente independientes y como el espacio de soluciones tiene dimensión 3 es una base. Luego toda solución es combinación lineal de la base

$$x[n] = c_1 r_1{}^n + c_2 r_2{}^n + c_3 r_3{}^n$$

b) Si una raíz r_1 es real y dos son complejas conjugadas, las escribimos así $\rho\, e^{\pm i \alpha}$.
Tenemos las soluciones $r_1{}^n$ y $\rho^n e^{\pm i n \alpha} = \rho^n(\cos n\,\alpha \pm i \operatorname{sen} n\,\alpha)$.

Separando parte real e imaginaria quedan tres soluciones reales y se comprueba que son linealmente independientes: $r_1{}^n$; $\rho^n \cos n\,\alpha$; $\rho^n \operatorname{sen} n\,\alpha$.
La solución general es

$$x[n] = c_1\, r_1{}^n + c_2\, \rho^n \cos n\,\alpha + c_3\, \rho^n \operatorname{sen} n\,\alpha$$

Caso 2 Raíces repetidas

a) Una raíz real r_1 doble y otra simple r_2 .
Una solución asociada a r_1 es $r_1{}^n$ y veamos que otra es $n\, r_1{}^n$. En efecto

$$a_0(n+3)\, r_1{}^{n+3} + a_1\,(n+2)\, r_1{}^{n+2} + a_2(n+1)\, r_1{}^{n+1} + a_3\, n\, r_1{}^n =$$
$$n\, r_1{}^n \left[a_0\, r_1{}^3 + a_1\, r_1{}^2 + a_2\, r_1 + a_3\right] + r_1{}^{n+1}\left[3\, a_0\, r_1{}^2 + 2\, a_1\, r_1 + a_2\right] = 0$$

y ambos corchetes dan cero pues r_1 al ser raíz doble anula al polinomio y a su derivada.
Se comprueba que $r_1{}^n$, $n\, r_1{}^n$, $r_2{}^n$ son linealmente independientes y por lo tanto forman una base.

b) Una raíz real triple r_1.
Entonces r_1 anula el polinomio característico y sus dos primeras derivadas, lo cual por argumentos similares al del caso anterior, permite demostrar que $r_1{}^n$, $n\, r_1{}^n$, $n^2\, r_1{}^n$ son soluciones de la homogénea y forman base.

De la misma manera una base explícita de la homogénea de orden s se encuentra por el método de Euler.
Si la ecuación característica es $a_0\, r^s + a_1\, r^{s-1} + ...+ a_s = 0$ que se factoriza con sus raíces:

$$a_0\, r^s + a_1\, r^{s-1} + ... + a_s = a_0\,(r - r_1)^{k_1} \ldots ..\,(r - r_t)^{k_t} \qquad \text{y} \qquad k_1 + ... + k_t = s$$

una base de la homogénea es

$$r_1{}^n,\ n\, r_1{}^n,\ ....,\ n^{k_1-1}\, r_1{}^n,\ r_2{}^n,\ n\, r_2{}^n,\ \ldots ....,\ n^{k_2-1}\, r_2{}^n,\ \ldots ....,\ r_t{}^n,\ n\, r_t{}^n,\ ....,\ n^{k_t-1}\, r_t{}^n$$

Ejemplo 1

a) La ecuación

$$x[n] + x[n-1] - x[n-2] - x[n-3] = 0$$

tiene raíces características $r = 1$ simple y -1 doble. Las soluciones son

$$x[n] = c_1 + c_2(-1)^n + c_3\, n\,(-1)^n$$

b) La ecuación

$$x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3] = 0$$

tiene raíces características $r = -1\,,\ \pm\, i.$

Las soluciones reales de la ecuación homogénea son

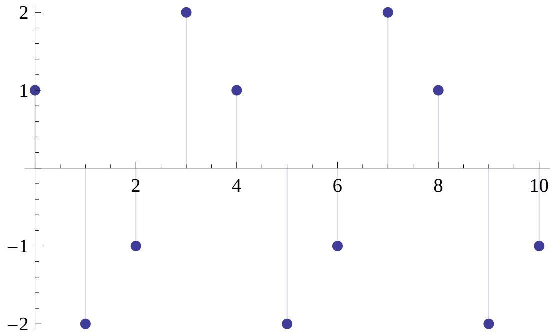
$$x[n] = c_1(-1)^n + c_2 \cos n\,\frac{\pi}{2} + c_3 \operatorname{sen} n\,\frac{\pi}{2}$$

que tienen período 4. Para $c_1 = 0\,,\ c_2 = 1\,,\ c_2 = -2$ se tiene la solución de período 4

```
Table[{n, Cos[n π/2] - 2 Sin[n π/2]}, {n, 0, 10}]
```

```
{{0, 1}, {1, -2}, {2, -1}, {3, 2}, {4, 1}, {5, -2}, {6, -1}, {7, 2}, {8, 1}, {9, -2}, {10, -1}}
```

```
DiscretePlot[Cos[n π/2] - 2 Sin[n π/2], {n, 0, 10}, PlotStyle → PointSize[0.02]]
```



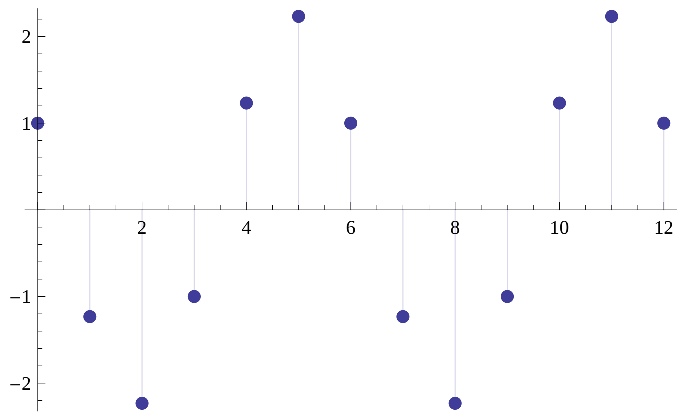
c) La ecuación

$$x[n] - x[n-1] + x[n-2] = 0$$

tiene soluciones reales $c_1 \cos n\,\frac{\pi}{3} + c_2 \operatorname{sen} n\,\frac{\pi}{3}$ que tienen período 6.

Para $c_1 = 1\,,\ c_2 = -2$ da

```
DiscretePlot[Cos[n π/3] - 2 Sin[n π/3], {n, 0, 12}, PlotStyle → PointSize[0.02]]
```



Ejemplo 2

Problema de los conejos de Fibonacci.
Supongamos que una pareja de conejos produce una nueva pareja cada mes y los recién nacidos se vuelven fértiles a los dos meses. Si se empieza con una pareja de recién nacidos, ¿cuántas parejas habrá en el mes n ?
Sea p_n la cantidad de parejas en la generación n .
Para los primeros meses se tiene

$$p_0 = p_1 = 1;\ p_2 = 2;\ p_3 = 3;\ p_4 = 5$$

En general, en el mes n estarán las parejas del mes anterior más las parejas recientes producidas por las del mes preanterior:

$$p_n = p_{n-1} + p_{n-2}$$

```
p[0] = p[1] = 1; p[n_] := p[n - 1] + p[n - 2];
Table[p[n], {n, 0, 20}]
```

{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10 946}

La ecuacion característica es $r^2 - r - 1 = 0$ con raíces $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
La solución es $p_n = c_1\, r_1{}^n + c_2\, r_2{}^n$ con $c_1 + c_2 = 1$ y $c_1\, r_1 + c_2\, r_2 = 1$.

```
Solve[c (1 - √5)/2 + (1 - c) (1 + √5)/2 == 1, c]
```

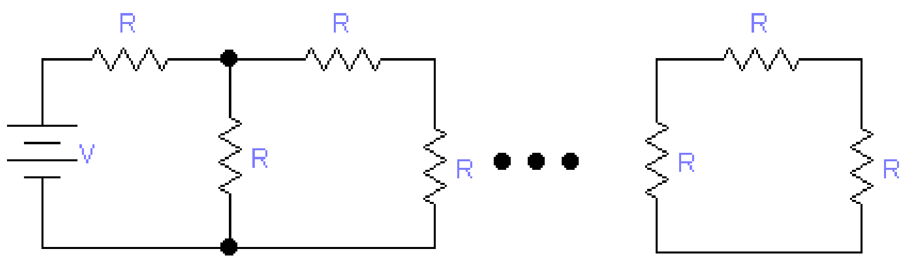
$$\left\{\left\{c \to \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right\}\right\}$$

```
p[n_] := ((-1 + √5)/(2 √5)) ((1 - √5)/2)^n + (1 - (-1 + √5)/(2 √5)) ((1 + √5)/2)^n
Table[p[n], {n, 0, 10}] // N
```

{1., 1., 2., 3., 5., 8., 13., 21., 34., 55., 89.}

Ejemplo 3

a) Se tiene una "escalera" de resistencias como en la figura. Se quiere determinar la corriente en cada resistencia.



Si i_k es la corriente en la k – ésima resistencia horizontal entonces $R\, i_k + R(i_k - i_{k+1}) = R\,(i_{k-1} - i_k)$

$$i_{k+1} - 3\, i_k + i_{k-1} = 0 \qquad\qquad 2 \leqslant k \leqslant n-1$$

Es una ecuación en diferencias de orden 2 homogénea.
Además se tienen las condiciones en los bordes $R\, i_1 + R\,(i_1 - i_2) = V$ y $R\, i_n + R\, i_n = R\,(i_{n-1} - i_n)$
que dan

$$2\, i_1 - i_2 = \frac{V}{R} \qquad \text{y} \qquad 3\, i_n - i_{n-1} = 0$$

La solución general de la homogénea es

$$i_k = \alpha \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^k + \beta \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^k$$

Imponiendo las dos condiciones de borde se hallan las constantes α , β .

Si son 20 mallas y $\frac{V}{R} = 2$ entonces queda el sistema lineal para hallar las constantes

$$2\,\alpha \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) + 2\,\beta \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = \alpha \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \beta \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 2$$

$$3\,\alpha \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{20} + 3\,\beta \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{20} = \alpha \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{19} + \beta \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{19}$$

Resolvemos este sistema en forma numérica:

```
NSolve[{α (2 (3 + √5)/2 - ((3 + √5)/2)^2) + β (2 (3 - √5)/2 - ((3 - √5)/2)^2) == 2,
   α (3 ((3 + √5)/2)^20 - ((3 + √5)/2)^19) + β (3 ((3 - √5)/2)^20 - ((3 - √5)/2)^19) == 0}, {α, β}] // Chop
```

$$\text{NSolve}\left[\left\{\alpha\left(2\,\frac{3+\sqrt{5}}{2}-\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)+\beta\left(2\,\frac{3-\sqrt{5}}{2}-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)==2,\ \alpha\left(3\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{20}-\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{19}\right)+\beta\left(3\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{20}-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{19}\right)==0\right\},\ \{\alpha,\beta\}\right]\ //\ \text{Chop}$$

{{α → 0, β → 3.23607}}

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2}\ //\ \text{N}$$

0.381966

Luego $i_k = 3.23607 \times\ 0.381966^{\,k}$

```
Table[3.23607 ((3 - √5)/2)^k, {k, 1, 20}] // Chop
```

{1.23607, 0.472136, 0.18034, 0.0688838, 0.0263113, 0.01005, 0.00383876, 0.00146628, 0.000560068, 0.000213927, 0.0000817127, 0.0000312115, 0.0000119217, 4.5537×10^{-6}, 1.73936×10^{-6}, 6.64375×10^{-7}, 2.53769×10^{-7}, 9.6931×10^{-8}, 3.70244×10^{-8}, 1.4142×10^{-8}}

Verificamos las condiciones de borde: $2\,i_1 - i_2 = 2 \times 3.23607\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) - 3.23607\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \simeq 2$

$3\,i_{20} - i_{19} \simeq 0.$

b) Si la escalera es infinita entonces las condiciones de borde son: $2\,i_1 - i_2 = \frac{V}{R}$ y $\lim_{n\to\infty} i_n = 0$

$$i_k = \beta\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^k \qquad \text{y} \qquad 2\,\beta\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) - \beta\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{V}{R} \quad \Rightarrow \quad \beta \simeq 1.618\,\frac{V}{R}$$

$$i_k = 1.618\,\frac{V}{R}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^k$$

Ejercicio

a) Halle una base de soluciones de las ecuaciones

$$x[n] + x[n-1] = 0 \qquad 2\,x[n] + x[n-1] = 0 \qquad x[n] + x[n-1] + 2\,x[n-2] = 0 \qquad 2\,x[n] + 2\,x[n-1] + x[n-2] = 0$$

b) Halle la solución de $x[n] + 2\,x[n-1] + x[n-2] = 0$ que verifica $x[0] = 1,\ x[1] = -1$

c) Cuánto vale α si la ecuación $2\,x[n] + \alpha\,x[n-2] = 0$ tiene por solución i^n .

Ejercicio

Si una raíz característica r es triple pruebe que $n^2\,r^n$ es solución de la ecuación homogénea.

Método de Euler para encontrar una solución particular de la no homogénea

Sea la ecuación no homogénea de orden s :

$$a_0\,x[n] + a_1\,x[n-1] + \ldots + a_s\,x[n-s] = d[n]$$

Sea la entrada $d[n] = r_0^n$ con r_0 real o complejo.
Si r_0 no es raíz característica proponemos una solución del mismo tipo $x[n] = k\, r_0^n$.
Si r_0 es raíz característica simple, se propone $x[n] = k\, n\, r_0^n$: "hay resonancia".

Sea $d[n] = n\, r_0^n$.
Si r_0 no es raíz característica se propone una solución particular $x[n] = (k_0 + k_1\, n)\, r_0^n$.
Si r_0 es raíz característica simple se propone una solución particular $x[n] = \left(k_1\, n + k_2\, n^2\right) r_0^n$.

En general se puede demostrar el siguiente resultado previsible.

Teorema
Sea $p_k(n)$ un polinomio de grado k y r_0 un número no nulo.
Si r_0 es una raíz característica de orden $t \geqslant 0$ de la ecuación homogénea $a_0\, x[n] + a_1\, x[n-1] + ...+ a_s\, x[n-s] = 0$ entonces una solución particular de la ecuación
:

$$a_0\, x[n] + a_1\, x[n-1] + ...+ a_s\, x[n-s] = p_k(n)\, r_0^n$$

es de la forma $x[n] = n^t\, q_k(n)\, r_0^n$ donde $q_k(n)$ es un polinomio adecuado de grado $\leqslant k$.
Demostración
A cargo del lector.

Ejemplo 1
Para la ecuación $x[n] - x[n-1] + 2\, x[n-2] = (-1)^n$, como -1 no es raíz característica, proponemos una solución particular de la forma $x_p[n] = k\, (-1)^n$. Reemplazándola en la ecuación obtenemos

$$k\, (-1)^n + 2\, k\, (-1)^{n-1} + 2\, k\, (-1)^{n-2} = 4\, k\, (-1)^n$$

Luego una solución particular es $x_p[n] = \frac{1}{4}\, (-1)^n$.

Ejemplo 2
Para la ecuación $x[n] - x[n-1] + x[n-2] = n$ como 1 no es raíz característica, proponemos una solución particular de la forma $x_p[n] = k_1 + k_2\, n$. Reemplazándola en la ecuación obtenemos la solución particular $x_p[n] = 1 + n$. Todas las soluciones son $x[n] = 1 + n + c_1 \cos n\, \frac{\pi}{3} + c_2\, \mathrm{sen}\, n\, \frac{\pi}{2}$.

Ejemplo 3
Para la ecuación $x[n] - 4\, x[n-1] + 3\, x[n-2] = n$, como 1 es raíz característica simple, proponemos una solución particular de la forma $x_p[n] = n\, (a + b\, n)$. Reemplazándola en la ecuación obtenemos

```
Clear[a, b]; a n + b n^2 - 4 (a (n - 1) + b (n - 1)^2) + 3 (a (n - 2) + b (n - 2)^2) // Simplify
-2 (a + 2 b (-2 + n))
```

Para que sea $-2\, (a + 2\, b\, (-2 + n)) = n$ debe ser $a = -1$, $b = -\frac{1}{4}$.
Una solución particular es $x_p[n] = -n - \frac{1}{4}\, n^2$.

Ejercicio

Calcular todas las soluciones de

a) $x[n]+\frac{1}{2}\,x[n-1]+\frac{1}{4}\,x[n-2]=1$

b) $x[n]-\frac{3}{4}\,x[n-1]+\frac{1}{8}\,x[n-2]=\frac{1}{3^n}$

c) $x[n]-\frac{3}{4}\,x[n-1]+\frac{1}{8}\,x[n-2]=\frac{1}{2^n}$

d) $x[n]-2\,x[n-1]+x[n-2]=(-1)^n$

e) $x[n]+x[n-1]-2\,x[n-2]=2\,n$

f) $x[n]+2\,x[n-1]+\,x[n-2]=(-1)^n$ Rta: $x[n]=\frac{1}{2}\,n^2(-1)^n+c_1\,(-1)^n+c_2\,n(-1)^n$

ESTABILIDAD INTERNA

Una ecuación lineal en diferencias se dice estable internamente si todas las soluciones $x[n]$ de la homogénea tienden a cero cuando n tiende a $+\infty$: $\lim_{n\to+\infty} x[n]=0$.

Por ejemplo, la ecuación $x[n]+2^{-1}\,x[n-1]=0$ es estable internamente pero $x[n]+x[n-1]=0$ no lo es.

Estudiaremos condiciones para que sea estable internamente.
Para ello es conveniente recordar el siguiente resultado de análisis matemático.

Lema
Sea z un número complejo con $|z|<1$.
Entonces para cada número natural p la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n^p\,z^n$ es absolutamente convergente.
En particular el término general tiene a cero: $\lim_{n\to\infty} n^p\,z^n=0$.
Demostración
Por el criterio del cociente para series

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^p\,|z|^{n+1}}{n^p\,|z|^n}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p\,|z|=\;|z|<1\quad\Rightarrow\quad\text{la serie}\;\sum_{n=1}^{\infty} n^p\,|z|^n\;\text{converge}$$

En particular su término general tiende a cero: $\lim_{n\to+\infty} n^p\,z^n=0$.

q.e.d.

Teorema
Una ecuación en diferencias lineal es internamente estable si y sólo si cada raíz característica tiene valor absoluto menor que 1.
Demostración
$\Rightarrow$) Supongamos que es internamente estable y que r_i es una raíz característica, entonces r_i^n es solución de la homogénea y por lo tanto $\lim_{n\to+\infty} r_i^n=0$. Luego necesariamente $|r_i|<1$.
$\Leftarrow$) Recíprocamente, si cada raíz característica r_i tiene valor absoluto menor que 1 , por el lema anterior, $\lim_{n\to\infty} n^p\,r_i^n=0$ para cada p natural. Luego como cada solución de la homogénea, es combinación lineal de sucesiones de la forma $n^p\,r_i^n$, también tienden a cero y la ecuación entonces es internamente estable.

q.e.d.

La pregunta natural llegados a este punto es la siguiente.
¿Cuándo un polinomio real mónico $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ tiene todas sus raíces en el disco unidad ?
Una condición necesaria se obtiene al factorizar el polinomio con sus raíces α_i

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n = \prod_{i=1}^{n} (z - \alpha_i) = z^n - (\alpha_1 + \ldots + \alpha_n) z^{n-1} + \ldots + (-\alpha_1) \ldots (-\alpha_n)$$

Luego $a_n = (-1)^n \alpha_1 \ldots \alpha_n$ y entonces es necesario que $| a_n | < 1$.

Pero esta condición no es suficiente como muestra el polinomio $z^2 - z - \frac{1}{2}$ cuyas raíces son $\frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{3}\right)$.

Método de la aplicación conforme

Transformando el disco unidad en el semiplano mediante una aplicación conforme se puede usar el criterio de Routh-Hurwitz para estudiar el problema planteado. Lo haremos primero para grado 2 .

Teorema

Un polinomio real de grado 2 $p(z) = z^2 + a z + b$ tiene sus dos raíces en $| z | < 1$ si y sólo si

$$-1 < b < 1 , \; 1 - a + b > 0 , 1 + a + b > 0$$

Demostración

La transformación conforme $\frac{z-1}{z+1} = w$ transforma el disco $| z | < 1$ en el semiplano $\mathrm{Re}(w) < 0$ y la transformación inversa es $z = \frac{1+w}{1-w}$.
Un polinomio $p(z)$ de grado n tiene todas sus raíces en el disco unidad si y sólo si la función racional $p\left(\frac{1+w}{1-w}\right)$ tiene todos sus ceros en el semiplano $\mathrm{Re}(w) < 0$.
En el caso del polinomio de grado 2 del enunciado esta función es

$$p\left(\frac{1+w}{1-w}\right) = \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^2 + a \frac{1+w}{1-w} + b = \frac{1}{(1-w)^2}\left[(1-a+b) w^2 + 2 (1-b) w + (1+a+b)\right]$$

Los ceros de esta función son los del numerador $q(w) = (1 - a + b) w^2 + 2 (1 - b) w + (1 + a + b)$

$\Rightarrow$) Si $p(z)$ tiene sus raíces en el disco unidad entonces $| b | < 1$ y las raíces de $q(w)$ tienen parte real negativa.
Por Routh-Hurwitz, como el coeficiente de w es $2 (1 - b) > 0$, los otros dos coficientes de $q(w)$ deben ser también positivos:

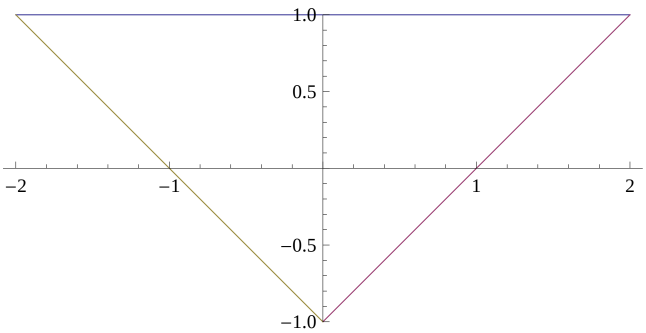
$$1 - a + b > 0 \; , \; 1 + a + b > 0 \; .$$

$\Leftarrow$) Recíprocamente, si $-1 < b < 1$, $1 - a + b > 0$, $1 + a + b > 0$ entonces por Ruth-Hurwitz $q(w)$ tiene sus raíces con parte real menor que cero y entonces $p(z)$ tiene sus raíces en el disco unidad.

q.e.d.

Un gráfico en el plano de los coeficientes nos muestra que para estabilidad interna el punto (a_1, a_2) debe estar dentro del triángulo de la figura.

```
Plot[{1, -1 + x, -1 - x}, {x, -2, 2}, PlotRange → {-1, 1}, AspectRatio → Automatic]
```



Ejercicio

a) El polinomio $z^2 + \frac{1}{4} z - \frac{1}{2}$ tiene sus raíces en $|z| < 1$ pues cumple las condiciones anteriores.
b) El polinomio $z^2 + z + k$ tiene sus raíces en $|z| < 1$ si y sólo si $0 < k < 1$.
c) Para qué valores de k el polinomio $z^2 + k z + \frac{3}{4}$ tiene sus raíces en $|z| < 1$.
d) Idem para $z^2 + k z + (1 - k)$

Podemos aplicar el mismo método a polinomios de grado 3 y 4.
Transformamos el polinomio $p(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0$ en la función racional $p\left(\frac{1+w}{1-w}\right)$ cuyo numerador es el polinomio del mismo grado $q(w) = (1 + w)^n + a_{n-1}(1 + w)^{n-1} (1 - w) + ... + a_0(1 - w)^n$.
Entonces $p(z)$ tiene todas sus raíces en el disco unidad $|z| < 1$ si y sólo si $q(w)$ las tiene en el semiplano $u < 0$.
Aplicamos entonces el criterio de Ruth-Hurwitz a $q(w)$.

Orden 3 Transformamos el polinomio real mónico $z^3 + b z^2 + c z + d$
y hallamos los coeficientes del polinomio transformado $q(w)$

```
q = (1 + w)^3 + b (1 + w)^2 (1 - w) + c (1 + w) (1 - w)^2 + d (1 - w)^3 // Expand
```

$1 + b + c + d + 3 w + b w - c w - 3 d w + 3 w^2 - b w^2 - c w^2 + 3 d w^2 + w^3 - b w^3 + c w^3 - d w^3$

```
a1 = Coefficient[q, w^3]
b1 = Coefficient[q, w^2]
c1 = Coefficient[q, w]
d1 = q /. w → 0
b1 c1 - a1 d1 // Expand // Simplify
```

```
1 - b + c - d

3 - b - c + 3 d

3 + b - c - 3 d

1 + b + c + d

-8 (-1 + c - b d + d^2)
```

Utilizamos el criterio de Ruth-Hurwitz a $q(w)$.

Si fueran todos los coeficientes menores que cero, sumando el primero con el tercero obtendríamos que $d > 1$ lo cual no puede
ocurrir en estabilidad. Luego si $z^3 + b z^2 + c z + d$ es estable deben ser todos mayores que cero y se deben cumplir las cinco desigualdades

$$1 - b + c - d > 0,\; 1 + b + c + d > 0,\; 3 - b - c + 3 d > 0,\; 3 + b - c - 3 d > 0,\; 1 - c + b d - d^2 > 0$$

y recíprocamente. Hemos demostrado el siguiente.

Teorema

Un polinomio real de grado 3 $p(z) = z^3 + b z^2 + c z + d$ tiene sus tres raíces en $|z| < 1$ si y sólo si sus coeficientes verifican las cinco
desigualdades

$$1 - b + c - d > 0,\; 1 + b + c + d > 0,\; 3 - b - c + 3 d > 0,\; 3 + b - c - 3 d > 0,\; 1 - c + b d - d^2 > 0$$

Ejemplo

Averiguamos para qué valores de k el polinomio $z^3 + z^2 + k z - \frac{9}{10}$ tiene sus raíces en el disco unidad.

```
a1 = 1; a2 = k; a3 = -9/10;
Reduce[{1 + a1 + a2 + a3 > 0, 1 - a1 + a2 - a3 > 0,
  3 - a1 - a2 + 3 a3 > 0, 3 + a1 - a2 - 3 a3 > 0, a3^2 + a2 < a1 a3 + 1}, k, Reals]
```

$$-\frac{9}{10} < k < -\frac{71}{100}$$

Por ejemplo, tomando $k = -0.8$ hallamos las raíces y comprobamos que están en el disco unidad.

```
NSolve[z^3 + z^2 - 0.8 z - 0.9 == 0, z]
```

```
{{z → -0.96152 - 0.224767 i}, {z → -0.96152 + 0.224767 i}, {z → 0.923039}}
```

```
Abs[z /. %]
```

{0.987441, 0.987441, 0.923039}

Orden 4 $z^4 + b z^3 + c z^2 + d z + e$

```
p = (1 + w)^4 + b (1 + w)^3 (1 - w) + c (1 + w)^2 (1 - w)^2 + d (1 + w) (1 - w)^3 + e (1 - w)^4 // Expand
```

$1 + b + c + d + e + 4 w + 2 b w - 2 d w - 4 e w + 6 w^2 - 2 c w^2 + 6 e w^2 + 4 w^3 - 2 b w^3 + 2 d w^3 - 4 e w^3 + w^4 - b w^4 + c w^4 - d w^4 + e w^4$

```
a1 = Coefficient[p, w^4]
b1 = Coefficient[p, w^3]
c1 = Coefficient[p, w^2]
d1 = Coefficient[p, w]
e1 = p /. w → 0
```

$1 - b + c - d + e$

$4 - 2 b + 2 d - 4 e$

$6 - 2 c + 6 e$

$4 + 2 b - 2 d - 4 e$

$1 + b + c + d + e$

```
b1 c1 d1 - d1^2 a1 - b1 e1 a1 // Expand // Simplify
```

$2 \left(38 + b^3 + 15 d - 20 d^2 + 3 d^3 + b^2 (-4 + 2 c - 3 d - 24 e) - c^2 (2 + d - 2 e) - 42 e - 18 d e - 8 d^2 e - 38 e^2 - d e^2 + 42 e^3 + 2 c \left(-14 + 3 d + d^2 + 24 e - 5 d e - 10 e^2\right) + b \left(1 + c^2 - d^2 - 2 c (3 + 2 d - 5 e) - 14 e + 17 e^2 + 8 d (4 + 3 e)\right)\right)$

No pueden ser estos coeficientes todos menores que cero pues sumando el segundo con el cuarto se tendría $e > 1$ lo cual no puede ocurrir en estabilidad.
Luego se deben cumplir las seis desigualdades

$$1 - b + c - d + e > 0,\ 1 + b + c + d + e > 0,\ 2 - b + d - 2 e > 0,\ 3 - c + 3 e > 0,\ 2 + b - d - 2 e > 0,$$

$$38 + b^3 + 15 d - 20 d^2 + 3 d^3 + b^2 (-4 + 2 c - 3 d - 24 e) - c^2 (2 + d - 2 e) - 42 e - 18 d e - 8 d^2 e - 38 e^2 - d e^2 + 42 e^3 + 2 c \left(-14 + 3 d + d^2 + 24 e - 5 d e - 10 e^2\right) + b \left(1 + c^2 - d^2 - 2 c (3 + 2 d - 5 e) - 14 e + 17 e^2 + 8 d (4 + 3 e)\right)\big) > 0$$

Teorema Un polinomio real de grado 4 $p(z) = z^4 + b z^3 + c z^2 + d z + e$ tiene sus cuatro raíces en $|z| < 1$ si y sólo si sus coeficientes verifican las
seis desiguladades anteriores.

Ejemplo 1 Veamos que el polinomio $z^4 + \frac{1}{2} z^3 + z^2 + \frac{1}{2} z + \frac{1}{2}$ cumple las desigualdades.
Además mostramos sus raíces y el valor absoluto de las mismas.

```
b = 1/2; c = 1; d = 1/2; e = 1/2;
{1 - b + c - d + e, 4 - 2 b + 2 d - 4 e, 6 - 2 c + 6 e, 4 + 2 b - 2 d - 4 e, 1 + b + c + d + e,
 2 (38 + b^3 + 15 d - 20 d^2 + 3 d^3 + b^2 (-4 + 2 c - 3 d - 24 e) - c^2 (2 + d - 2 e) -
    42 e - 18 d e - 8 d^2 e - 38 e^2 - d e^2 + 42 e^3 + 2 c (-14 + 3 d + d^2 + 24 e - 5 d e - 10 e^2) +
    b (1 + c^2 - d^2 - 2 c (3 + 2 d - 5 e) - 14 e + 17 e^2 + 8 d (4 + 3 e)))}
s = NSolve[z^4 + b z^3 + c z^2 + d z + e, z]
Abs[z /. s]
```

$$\left\{\frac{3}{2}, 2, 7, 2, \frac{7}{2}, \frac{23}{2}\right\}$$

```
{{z → -0.475468 - 0.621671 i}, {z → -0.475468 + 0.621671 i},
 {z → 0.225468 - 0.874889 i}, {z → 0.225468 + 0.874889 i}}

{0.782652, 0.782652, 0.903475, 0.903475}
```

Ejemplo 2 Veamos que el polinomio $z^4 + \frac{1}{2} z^3 + z^2 + \frac{1}{2}$ no cumple las desigualdades.
Además mostramos sus raíces y el valor absoluto de las mismas.

```
b = 1/2; c = 1; d = 0; e = 1/2;
{1 - b + c - d + e, 4 - 2 b + 2 d - 4 e, 6 - 2 c + 6 e, 4 + 2 b - 2 d - 4 e, 1 + b + c + d + e,
 2 (38 + b^3 + 15 d - 20 d^2 + 3 d^3 + b^2 (-4 + 2 c - 3 d - 24 e) - c^2 (2 + d - 2 e) -
    42 e - 18 d e - 8 d^2 e - 38 e^2 - d e^2 + 42 e^3 + 2 c (-14 + 3 d + d^2 + 24 e - 5 d e - 10 e^2) +
    b (1 + c^2 - d^2 - 2 c (3 + 2 d - 5 e) - 14 e + 17 e^2 + 8 d (4 + 3 e)))}
s = NSolve[z^4 + b z^3 + c z^2 + d z + e, z]
Abs[z /. s]

{2, 1, 7, 3, 3, -3}

{{z → -0.5 - 0.866025 i}, {z → -0.5 + 0.866025 i},
 {z → 0.25 - 0.661438 i}, {z → 0.25 + 0.661438 i}}

{1., 1., 0.707107, 0.707107}
```

Ejemplo 3 Averiguamos para qué valores de k el polinomio $z^4 + \frac{1}{2} z^3 + z^2 + k z + \frac{1}{2}$ cumple las desigualdades.

```
b = 1/2; c = 1; d = k; e = 1/2;
Reduce[{1 - b + c - d + e > 0,
4 - 2 b + 2 d - 4 e > 0,
   6 - 2 c + 6 e > 0,
   4 + 2 b - 2 d - 4 e > 0,
   1 + b + c + d + e > 0,
   2 (38 + b^3 + 15 d - 20 d^2 + 3 d^3 + b^2 (-4 + 2 c - 3 d - 24 e) - c^2 (2 + d - 2 e) - 42 e -
       18 d e - 8 d^2 e - 38 e^2 - d e^2 + 42 e^3 + 2 c (-14 + 3 d + d^2 + 24 e - 5 d e - 10 e^2) +
       b (1 + c^2 - d^2 - 2 c (3 + 2 d - 5 e) - 14 e + 17 e^2 + 8 d (4 + 3 e))) > 0}, k, Reals] // N

0.0636108 < k < 1.27593
```

Ejemplo

Averiguamos para qué valores de k el polinomio $z^3 + z^2 + k z - \frac{9}{10}$ tiene sus raíces en el disco unidad.

$$a_1 = 1;\ a_2 = k;\ a_3 = -\frac{9}{10};$$

$$\text{Reduce}\left[\left\{1 + a_1 + a_2 + a_3 > 0,\ 1 - a_1 + a_2 - a_3 > 0,\ 3 - a_1 - a_2 + 3\,a_3 > 0,\ 3 + a_1 - a_2 - 3\,a_3 > 0,\ a_3^2 + a_2 < a_1\,a_3 + 1\right\},\ k,\ \text{Reals}\right]$$

$$-\frac{9}{10} < k < -\frac{71}{100}$$

Por ejemplo, tomando $k = -0.8$ hallamos las raíces y comprobamos que están en el disco unidad.

$$\text{NSolve}\left[z^3 + z^2 - 0.8\,z - 0.9 == 0,\ z\right]$$

$$\{\{z \to -0.96152 - 0.224767\,i\},\ \{z \to -0.96152 + 0.224767\,i\},\ \{z \to 0.923039\}\}$$

```
Abs[z /. %]
{0.987441, 0.987441, 0.923039}
```

Método de Schur-Cohn

Un método alternativo es uno propuesto por Schur y Cohn y que pasamos a describir.

Sea $p_n(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ un polinomio real mónico de grado n con $a_n \neq 0$.
Hemos visto que si tiene sus raíces en el disco unidad $|z| < 1$ entonces $|a_n| < 1$.
Definimos un polinomio real mónico $p_{n-1}(z)$ de grado $n-1$ mediante la igualdad

$$p_n(z) - a_n z^n p_n\left(\frac{1}{z}\right) = \left(1 - a_n^2\right) z\, p_{n-1}(z)$$

Luego en la circunferencia unidad $|z| = 1$ se tiene, suponiendo $|a_n| < 1$,

$$\left| p_n(z) - \left(1 - a_n^2\right) z\, p_{n-1}(z) \right| = \left| a_n z^n p_n\left(\frac{1}{z}\right) \right| < \left| p_n\left(\frac{1}{z}\right) \right| = |p_n(z)|$$

La última igualdad es cierta pues en la circunferencia unidad $z^{-1} = \overline{z}$ y como $p_n(z)$ es un polinomio real se tiene $p_n\left(z^{-1}\right) = p_n(\overline{z}) = \overline{p_n(z)}$ y por lo tanto $\left|p_n\left(z^{-1}\right)\right| = |p_n(z)|$.

Por el teorema de Rouché dado en el apéndice, el polinomio $p_n(z)$ tiene sus n raíces en $|z| < 1$ si y sólo si $\left(1 - a_n^2\right) z\, p_{n-1}(z)$ las tiene ahí, o sea, si y sólo si $p_{n-1}(z)$ tiene sus $n-1$ raíces en $|z| < 1$.
Hemos probado el siguiente resultado.

Teorema de Schur-Cohn

Sea $|a_n| < 1$. $p_n(z)$ tiene sus raíces en $|z| < 1$ si y sólo si $p_{n-1}(z)$ tiene sus raíces en $|z| < 1$.

Usando iteradamente este teorema se encuentran las condiciones para que un polinomio de grado arbitrario tenga sus raíces en el disco unidad. En cada iteración se obtiene una desigualdad.

Aplicación de este criterio

a) Para $p_2(z) = z^2 + a_1 z + a_2$ se tiene

$$p_2(z) - a_2 z^2 p_2\left(z^{-1}\right) = \left(1 - a_2^2\right) z \left(z + \frac{a_1}{1 + a_2}\right) \quad \Rightarrow \quad p_1(z) = z + \frac{a_1}{1 + a_2}$$

Si $|a_2| < 1$ entonces $p_2(z)$ tiene sus raíces en el disco unidad si y sólo si $p_1(z) = z + \frac{a_1}{1 + a_2}$ la tiene ahí .
Esto ocurre si y sólo si $|a_1| < |1 + a_2|$.

De esta manera reencontramos las condiciones dadas por el método anterior para polinomios de grado dos.

b) Para $p_3(z) = z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3$ se tiene

$$p_3(z) - a_3 z^3 p_3\left(z^{-1}\right) = \left(1 - a_3^2\right) z \left(z^2 + \frac{a_1 - a_2 a_3}{1 - a_3^2} z + \frac{a_2 - a_1 a_3}{1 - a_3^2}\right) \quad \Rightarrow \quad p_2(z) = z^2 + \frac{a_1 - a_2 a_3}{1 - a_3^2} z + \frac{a_2 - a_1 a_3}{1 - a_3^2}$$

Si $|a_3| < 1$ entonces $p_3(z)$ tiene sus raíces en el disco unidad si y sólo si $p_2(z)$ las tiene allí.
Aplicamos las condiciones halladas antes para $p_2(z)$ y encontramos las tres condiciones

$$|a_3| < 1 \quad , \quad |a_2 - a_1 a_3| < 1 - a_3^2 \quad \text{y} \quad |a_1 - a_2 a_3| < |1 - a_3^2 + a_2 - a_1 a_3|$$

Teorema
Un polinomio real y mónico de grado 3 $p(z) = z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3$ tiene sus raíces en $|z| < 1$ si y sólo si $|a_3| < 1$, $|a_2 - a_1 a_3| < 1 - a_3^2$ y $|a_1 - a_2 a_3| < |1 - a_3^2 + a_2 - a_1 a_3|$.

Ejemplo

El polinomio $z^3 + z^2 + k z - 0.9$ tiene sus raíces en el disco unidad si y sólo si b verifica

$$|k + 0.9| < 1 - 0.9^2 \quad \text{y} \quad |1 + 0.9 k| < |1 - 0.9^2 + k + 0.9|$$

o sea $\quad -1.09 < k < -0.71 \quad$ y $\quad -0.9 < k$

Luego $\quad -0.9 < k < -0.71$.

Por ejemplo, tomando $b = -0.71$ se obtiene la raíz $-0.95 + 0.31225\, i$ que tiene valor absoluto 1.
y tomando $b = -0.9$ se obtiene la raíz -1 que tiene valor absoluto 1.
Podemos usar el programa para resolver las desigualdades.

```
a1 = 1; a2 = k; a3 = -9/10;
Reduce[
 {Abs[a3] < 1, Abs[a2 - a1 a3] < 1 - a3^2, Abs[a1 - a2 a3] < Abs[1 - a3^2 + a2 - a1 a3]}, k, Reals]
```

$$-\frac{9}{10} < k < -\frac{71}{100}$$

Ejemplo

El polinomio $z^3 + (0.2 + k) z^2 + z + 0.46$ tiene sus raíces en el disco unidad si y sólo si k verifica

$$|1 - (0.2 + k)\, 0.46| < |1 - 0.46^2| \quad \text{y} \quad |0.2 + k - 0.46| < 1 - 0.46^2 + 1 - (0.2 + k)\, 0.46|$$

Resolvemos estas desigualdades con el programa.

```
a1 = 2/10 + k; a2 = 1; a3 = 46/100;
Reduce[
 {Abs[a3] < 1, Abs[a2 - a1 a3] < 1 - a3^2, Abs[a1 - a2 a3] < Abs[1 - a3^2 + a2 - a1 a3]}, k, Reals]
```

$\frac{13}{50} < k < \frac{67}{50}$

Luego k debe cumplir $\frac{13}{50} = 0.26 < k < 1.34 = \frac{67}{50}$

Ejercicio

a) Mostrar que los polinomios $z^3 + z^2 + z + \frac{1}{2}$ y $z^3 - z^2 + \frac{1}{2} z + \frac{1}{4}$ tienen sus raíces en $|z| < 1$.

b) Para qué valores de k el polinomio $z^3 - z^2 + k z + \frac{2}{3}$ tienen sus raíces en el disco unidad.

Rta: $-\frac{2}{3} < k < -\frac{1}{9}$

c) Idem para $z^3 + (0.4 - k) z^2 + k z + 0.3$ Rta: $-0.15 < k < 0.792308$

Ejercicio

Para un polinomio real mónico $p_4(z)$ de grado 4 hallar el polinomio $p_3(z)$ dado por el esquema de Schur-Cohn y describir las condiciones para que las raíces estén en el disco unidad.

RESPUESTAS A LA δ

Sea $h[n]$ la respuesta causal a la δ de la ecuación

$$a_0 x[n] + a_1 x[n-1] + ...+a_s x[n-s] = \delta[n]$$

Por razones de claridad, la hallamos para $s = 2$ aunque el método propuesto es general. Se tiene

$$a_0 h[n] + a_1 h[n-1] + a_2 h[n-2] = \delta[n]$$

Luego poniendo sucesivamente $n = 0$ y $n = 1$ obtenemos $h[0] = \frac{1}{a_0}$, $h[1] = -\frac{a_1}{a_0^2}$

Sea $x_0[n]$ la solución de la ecuación homogénea asociada que verifica esas condiciones iniciales

$$x_0[0] = \frac{1}{a_0}\ ,\ \ x_0[1] = -\frac{a_1}{a_0{}^2}$$

Entonces $h[n] = x_0[n]\,u[n]$ verifica la ecuación pues

$$a_0\,h[0] + a_1\,h[-1] + a_2\,h[-2] = a_0\,x[0] = 1$$

$$a_0\,h[1] + a_1\,h[0] + a_2\,h[-1] = a_0\,x_0[1] + a_1\,x_0[0] = 0$$

y para $n \geqslant 2$

$$a_0\,h[n] + a_1\,h[n-1] + a_2\,h[n-2] = a_0\,x_0[n] + a_1\,x_0[n-1] + a_2\,x_0[n-2] = 0$$

Todas las respuestas a la δ son de la forma $h[n] + y_0[n]$ donde $y_0[n]$ es una solución de la homogénea.

Ejemplo

Para la ecuación $x[n] - x[n-1] + \frac{1}{4}\,x[n-2] = d[n]$ se tiene la solución de la homogénea

$$x[n] = c_1\,2^{-n} + c_2\,n\ 2^{-n}$$

La que verifica $x[0] = 1$, $x[1] = 1$ es $x_0[n] = (1+n)\,2^{-n}$. Luego

$$h[n] = (1+n)\,2^{-n}\,u[n]$$

Todas las respuestas a la δ son $(1+n)\,2^{-n}\,u[n] + c_1\,2^{-n} + c_2\,n\,2^{-n}$

Ejercicio

Calcular $h[n]$ para a) $x[n] + x[n-1] + x[n-2] = d[n]$ b) $6\,x[n] - 5\,x[n-1] + x[n-2] = d[n]$

c) $x[n] - x[n-1] + \frac{1}{2}\,x[n-2] = d[n]$ d) $x[n] + 2\,x[n-1] + 2\,x[n-2] = d[n-1]$

e) $x[n] + 2\,x[n-1] + x[n-2] = d[n] - 2\,d[n-1]$

CONVOLUCIÓN DISCRETA

Dadas dos sucesiones $x[n]$ e $y[n]$ definimos la convolución

$$(x * y)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,y[n-k]$$

siempre que la suma sea convergente.

Por ejemplo

$$(x * \delta)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k] = x[n]$$

Por lo tanto δ es una unidad para la convolución.

Teorema de existencia.

Sea $x \in \mathfrak{S}_1$ es decir $\sum_{-\infty}^{\infty} |x[k]| = L < \infty$.

a) Si y es acotada entonces la convolución $x * y$ existe y es acotada.

b) Si y está en $\mathfrak{S}_1$ entonces $x * y$ está en $\mathfrak{S}_1$.

Demostración

a) Sea $|y[k]| \leqslant M$. Entonces $\sum_{k=-n}^{n} |x[k]| \; |y[n-k]| \leqslant M \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]| = M\, L < \infty$

Luego la convolución existe en cada n y $|(x * y)[n]| \leqslant M\, L$.

b) Si y está en $\mathfrak{S}_1 \subset \mathfrak{S}_a$, por la parte anterior existe $x * y$ y además

$$\sum_{n=-M}^{M} |(x * y)[n]| \leqslant \sum_{n=-M}^{M} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]| \; |y[n-k]|\right)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]| \left(\sum_{n=-M}^{M} |y[n-k]|\right) \leqslant \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|\right) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |y[k]|\right) < \infty$$

lo cual prueba que $x * y$ está en $\mathfrak{S}_1$.

q.e.d.

Cálculo y propiedades de la convolución discreta

Las propiedades son análogas a las propiedades de la convolución continua:
asociativa, conmutativa, distributiva respecto de la suma y $\delta[n]$ es la identidad.

Para calcular una convolución $x * y$ podemos emplear el mismo método que en el caso continuo:

1. hallar la simétrica de y : $y[-k]$
2. correrla a la posición n : $y[n-k]$
3. hacer los productos $x[k]\, y[n-k]$ y sumarlos.

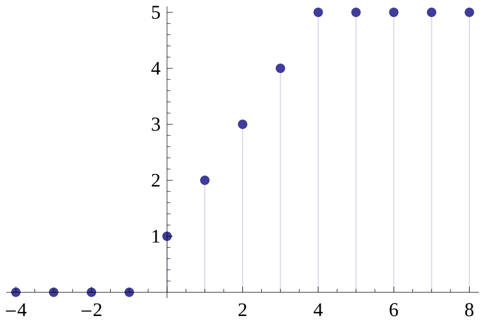
Ejemplo 1

Calculamos la convolución $u * \prod_{[0,4]}$ del escalón unitario con el escalón unitario finito entre 0 y 4 .

```
x[n_] := If[n < 0, 0, 1];
y[n_] := If[0 ≤ n ≤ 4, 1, 0];
```

$$(x * y)[n\_] := \sum_{i=0}^{n} x[i]\, y[n - i];$$

```
DiscretePlot[ (x * y)[k], {k, -4, 8}, PlotStyle -> PointSize[0.02]]
```

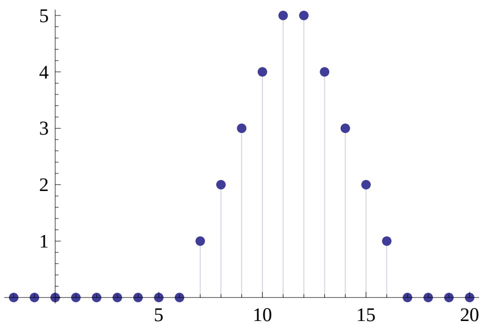


Ejemplo 2

Calculamos la convolución de dos escalones unitarios finitos: $\prod_{[0,4]} * \prod_{[7,12]}$

```
x[n_] := If[0 ≤ n ≤ 4, 1, 0];
y[n_] := If[7 ≤ n ≤ 12, 1, 0];
(x * y)[n_] := Sum[x[i] y[n - i], {i, 0, n}];
DiscretePlot[ (x * y)[k], {k, -2, 20}, PlotStyle -> PointSize[0.02]]
```

$$(x * y)[n\_] := \sum_{i=0}^{n} x[i]\, y[n-i];$$



Ejemplo 3

Calculamos la convolución $\{-1, 0, 1_0, 2, 1\} * \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

Escribimos $\{-1, 0, 1_0, 2, 1\} = -\delta[n+2] + \delta[n] + 2\,\delta[n-1] + \delta[n-2]$ y usamos las propiedades

$$\{-1, 0, 1_0, 2, 1\} * \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}\left(\frac{(n+2)\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) + 2\operatorname{sen}\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{(n-2)\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 2\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Ejercicio

Calcular y graficar las convoluciones

a) $\{2, -1_0, 1, 0, 2\} * \{2, -1, 0_0\}$

b) $n\,u * \prod_{[-1,1]}$

c) $\{-1, 0, 1, 0_0\} * u[-n]$

d) $\{1, 2_0, 0, -1\} * \prod_{[1,2]}$

e) $(-1)^n * \prod_{[-2,1]}$

f) $u[2-n] * 2^{-n}\,u[n]$

Ejercicio

Comprobar que $(\{-1, 1_0, 0, 1\} * u)[n] = \delta[n+1] + u[n-2]$

Ejercicio

Si $x[n]$ es finita o absolutamente convergente e $y[n]$ es de período p probar que la convolución $x * y$ es de período p .

Ejercicio

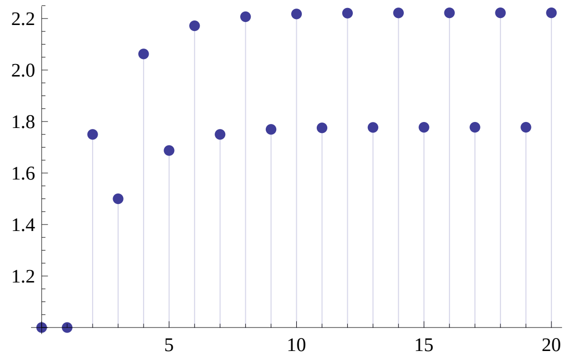
a) Demostrar las propiedades enunciadas de la convolución.
b) Una sucesión es par si $v[-n] = v[n]$ y es impar si $v[-n] - v[n]$
Probar que la convolución de dos pares o dos impares es par, y que la convolución de una par y una impar es impar.
c) Si dos sucesiones son causales la convolución existe y es causal y está dada por una suma finita:

$$(x * y)[n] = \sum_{k=0}^{n} x[k]\, y[n-k]$$

d) Si x e y son finitas probar que la convolución también es finita : $x\,,\ y \in \mathfrak{S}_f \ \Rightarrow\ x * y \in \mathfrak{S}_f$

```
DiscretePlot[Sum[(1 + k) 2^-k 1/2 (1 + (-1)^(n-k)), {k, 0, n}], {n, 0, 20}, PlotStyle → PointSize[0.02]]
```

$$\texttt{DiscretePlot}\left[\sum_{k=0}^{n} (1+k)\, 2^{-k}\, \frac{1}{2}\left(1+(-1)^{n-k}\right),\ \{n, 0, 20\},\ \texttt{PlotStyle} \to \texttt{PointSize}[0.02]\right]$$



Teorema sobre e**stabilidad**
Para una ecuación de orden s : $a_0\, x[n] + a_1\, x[n-1] + ... + a_s\, x[n-s] = d[n]$ son equivalentes:
a) la ecuación es internamente estable;
d) para cada entrada acotada todas las salidas son acotadas en $n \geqslant 0$.
Demostración
a) $\Rightarrow$ b)
Si es internamente estable cada raíz característica tiene valor absoluto menor que 1.
La respuesta causal a $\delta[n]$ es de la forma $h[n] = (p_1(n)\, r_1{}^n + ... + p_t(n)\, r_t{}^n)\, u[n]$ con ciertos polinomios

$p_i(n)$ de grado menor que la multiplicidad de la raíz característica r_i y $|r_i| < 1$.
Elegimos un número $0 < a < 1$ tal que $|r_1| < a, \ldots, |r_s| < a$ y entonces para alguna costante k
$|p_i(n)\ r_i^n| = \left|p_i(n)\left(\frac{r_i}{a}\right)^n\right| a^n < k\ a^n$ pues $\lim_{n\to+\infty} p_i(n)\left(\frac{r_i}{a}\right)^n = 0 \quad (i = 1, .., t)$.
Luego $|h[n]| \le t\ k\ a^n$ y $\sum_{k=0}^{\infty} |h[k]| \le t\,k\sum_{i=0}^{\infty} a^n = \frac{t\,k}{1-a} < \infty$.
Sea d una entrada acotada: $|d[n]| \le M$. La convolución $x[n] = (h * d)[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]\,d[n-k]$ es absolutamente convergente y define una solución que es acotada pues

$$|x[n]| \le \sum_{k=0}^{\infty} |h[k]|\ |d[n+p-k]| \le M \sum_{k=0}^{\infty} |h[k]| < \infty .$$

Como toda solución es la suma de esta solución y una de la homogénea $q_1(n)\,r_1{}^n + \ldots + q_t(n)\,r_t{}^n$ que es acotada para $n \ge 0$ resulta que todas las salidas son acotadas para $n \ge 0$.

b) $\Rightarrow$ a)
Para la entrada nula las salidas son la del homogéneo. Una raíz característica r no puede tener módulo mayor que 1 pues no sería acotada. Tampoco puede tener módulo 1 pues la entrada r^n es acotada pero como hay resonancia una salida es no acotada. Luego la ecuación es internamente estable.

q.e.d.

Teorema "Entrada y salida periódica"
Sea $h[n]$ la respuesta causal a la $\delta[n]$ de una ecuación internamente estable

$$a_0\,x[n] + a_1\,x[n-1] + \ldots + a_s\,x[n-s] = d[n]$$

Para una entrada $d[n]$ de período p la convolución $x = h * d$ es una solución de período p de la ecuación y es la única salida de período p .
Demostración
Como $d \in \mathfrak{S}_{(p)}$ es acotada y como el sistema es internamente estable, la serie $x[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]\,d[n-k]$ es absolutamente convergente y define una solución. Además

$$x[n+p] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]\,d[n+p-k] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]\,d[n-k] = x[n]$$

La resta de dos salidas de período p es una salida del homogéneo que es de período p y como se desvanece para $n \to +\infty$ Luego se tiene $x[n] = x[n+p] = \ldots = x[n+k\,p]$ y una constante que tienede a cero es cero.

q.e.d.

Nota Si $x[n]$ es una solución cualquiera y $x_p[n]$ es la salida periódica entonces $x[n] = x_p[n] + x_0[n]$ con $x_0[n]$ salida del homogéneo. Luego para n grande $x[n]$ está cerca a $x_p[n]$.

Ejemplo 1

La ecuación $x[n] - x[n-1] + \frac{1}{4} x[n-2] = d[n]$ es internamente estable y $h[n] = (1+n)\, 2^{-n}\, u[n]$.

Para la entrada $d[n] = \frac{1}{2}\,(1 + (-1)^n) = \{ \ldots 1,\ 0,\ 1_0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \ldots .\}$ de período 2 se tiene

$$x[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]\, d[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} (1+k)\, 2^{-k}\, \frac{1}{2} \left(1 + (-1)^{n-k}\right)$$

a) Sumando la serie obtenemos $x = \left\{ \ldots,\ \frac{16}{9},\ \left(\frac{20}{9}\right)_0,\ \frac{16}{9},\ \frac{20}{9},\ \frac{16}{9},\ \ldots . \right\}$ de período 2 .

b) Otra manera más sencilla de obtener la solución de período 2 es buscándola directamente.
Sean sus valores $x[0] = x_0$, $x[1] = x_1$. Entonces $x[2] = x_0$, $x[3] = x_1$.
De la ecuación para $n = 2$ y $n = 3$ obtenemos $x_0 - x_1 + \frac{1}{4} x_0 = 1$ y $x_1 - x_0 + \frac{1}{4} x_1 = 0$
Resolviendo el sistema anterior queda $x_0 = \frac{20}{9}$, $x_1 = \frac{16}{9}$

Ejemplo 2

La ecuación $x[n] + \frac{1}{2} x[n-1] = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} n$ es internamente estable y $h[n] = (-1)^n\, 2^{-n}\, u[n]$.

La entrada $d[n] = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} n = \{ \ldots 0,\ -1,\ 0_0,\ 1,\ 0,\ -1,\ 0,\ \ldots .\}$ es de período 4 y

$$x[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]\, d[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, 2^{-k} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} (n-k)$$

a) Sumando la serie obtenemos $x = \left\{ \ldots \ldots,\ \left(\frac{2}{5}\right)_0,\ \frac{4}{5},\ -\frac{2}{5},\ -\frac{4}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{4}{5},\ \ldots . \right\}$ de período 4 .

b) Buscamos directamente la solución de período 4.
Sean sus valores $x[0] = x_0$, $x[1] = x_1$, $x[2] = x_2$, $x[3] = x_3$. Entonces $x[4] = x_0$, $x[5] = x_1$, etc .
De la ecuación para $n = 1$, 2, 3 obtenemos

$$x_1 + \frac{1}{2} x_0 = 1\ ,\ x_2 + \frac{1}{2} x_1 = 0\ ,\ x_3 + \frac{1}{2} x_2 = -1\ ,\ x_0 + \frac{1}{2} x_3 = 0$$

Resolviendo el sistema anterior queda $x_0 = \frac{2}{5}$, $x_1 = \frac{4}{5}$, $x_2 = -\frac{2}{5}$, $x_3 = -\frac{4}{5}$.

Ejercicio

a) Hallar la solución periódica de la ecuación $x[n] - \frac{1}{2} x[n-1] = 1 + (-1)^n$

b) Hallar la solución de la ecuación $x[n] - \frac{1}{2}\, x[n-1] = 1 + (-1)^n$ que verifica $x[0] = 0$
y comprobar que se acerca a la periódica. Graficar ambas.

Ejercicio
Hallar la solución periódica de la ecuación

$$x[n] - \frac{1}{2}\, x[n-1] = d[n] \quad \text{donde} \quad d[n] = \{\,...\, 1_0,\ -1,\ -1,\ ...\}\ \text{ tiene período 3}$$

Rta: $x = \left\{ ...,\ \left(\frac{2}{7}\right)_0,\ -\frac{6}{7},\ -\frac{10}{7},\ ....\right\}$ con período 3

Ejercicio
Estudiar las salidas periódicas de la ecuación inestable $x[n] + x[n-1] = d[n]$ para las siguientes entradas
a) $d[n] = (-1)^n$ (ninguna salida periódica)
b) $d[n]$ de período 3 con modelo $\{1_0,\ 0,\ 0\}$ (salida única periódica)
c) $d[n]$ de período 4 con modelo $\{1_0,\ 0,\ 0,\ 0]$ (infinitas salidas periódicas)

Transformaciones de convolución

Dada g en $\mathfrak{S}$, se define la transformación de convolución

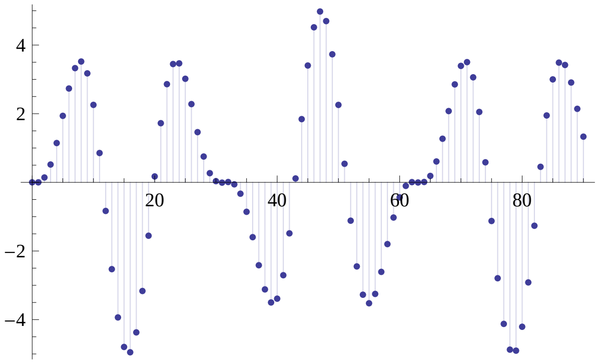
$$\tau_g : \mathfrak{S}_f \to \mathfrak{S} \quad \text{dada por } \tau_g\,(d) = d * g$$

que es una transformación lineal. Dependiendo de g el dominio se puede extender.
Si g tiene serie absolutamente convergente $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\, g[k]\, | < \infty$ entonces $\tau_g : \mathfrak{S}_a \to \mathfrak{S}_a$.

Ejemplo
Una ecuación en diferencias lineal tiene asociada h y la transformación asocoiada $\tau_h : \mathfrak{S}_f \to \mathfrak{S}$
equivale a la ecuación para entradas causales: $\tau_h : \mathfrak{S}_+ \to \mathfrak{S}_+$. Si es internamente estable $\tau_h : \mathfrak{S}_a \to \mathfrak{S}_a$.

Ejemplo
Sea $g[n] = \text{sen}(\,0.3\ n)\ u[n]$ y $d[n] = \text{sen}\,(0.5\ n)\ u[n]$
La convolución es $(d * g)[n] = \sum_{k=0}^{n} \text{sen}(\,0.3\,k)\ \text{sen}\,(0.5\,(n-k))$
Graficamos los primeros 90 valores.

$$\text{DiscretePlot}\left[\sum_{k=0}^{n} \text{Sin}[0.3\,k]\ \text{Sin}[0.5\,(n-k)],\ \{n,\ 0,\ 90\}\right]$$



Teorema A cada $g \in \mathfrak{S}$ le asociamos la transformación lineal de convolución $\tau_g(x) = x * g$.

a) si g está en $\mathfrak{S}_1$ entonces $\tau_g : \mathfrak{S}_a \to \mathfrak{S}_a$

b) si g está en $\mathfrak{S}_f$ entonces $\tau_g : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$

c) si g está en $\mathfrak{S}_+$ entonces $\tau_g : \mathfrak{S}_+ \to \mathfrak{S}_+$

Demostración

a) Supongamos que g está en $\mathfrak{S}_1$: $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |g[k]| = L < \infty$. Entonces la convolución $g * x$ está definida para cada x acotada pues si $|x[n]| \leqslant M$ entonces

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|\ |g[n-k]| \leqslant M \sum_{k=-\infty}^{\infty} |g[n-k]| = M\,L$$

Luego la serie convolución converge y además la convolución está acotada por $M\,L$.

b) Si g está en $\mathfrak{S}_f$ es claro que la convolución $g * x$ está definida para cada x en $\mathfrak{S}$.

c) Si g está en $\mathfrak{S}_+$ y x en $\mathfrak{S}_+$ la convolución

$$(g * x)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]\,x[n-k] = \sum_{k=0}^{n} g[k]\,x[n-k]$$

q.e.d.

Discretización de sistemas continuos

Mostramos ahora cómo se discretiza un sistema continuo dado por una ecuación diferencial de primer orden. Más adelante veremos un método similar que se puede usar para discretizar sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden lo cual incluirá como caso particular a las ecuaciones diferenciales de orden n.

Ejemplo

Consideremos el problema de primer orden $\begin{cases} x' + 2\,x = u(t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$

Vamos a "discretizar" este problema por el método de Euler.
Para ello elegimos un paso $T > 0$ pequeño y aproximamos la derivada mediante el cociente incremental:

$$x'(t) \simeq \frac{x(t+T) - x(t)}{T}$$

Tenemos el muestreo $x[n] = x(n\,T)$ y $u[n] = u(n\,T) = 1$ y el sistema discreto

$$\frac{1}{T}\,(x[n+1] - x[n]) + 2\,x[n] = 1 \quad \text{y} \quad x[0] = 0$$

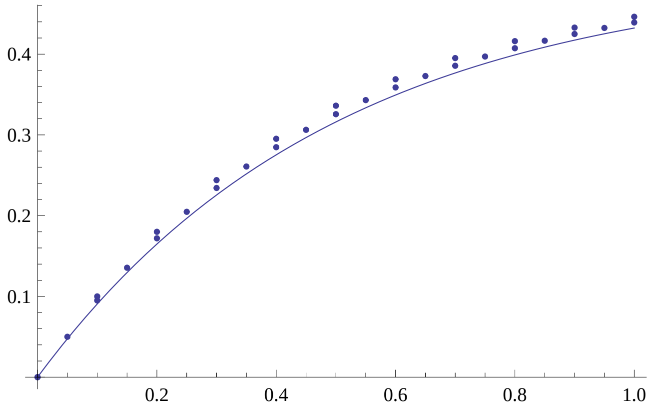
o reordenando

$$\begin{cases} x[n+1] + (2\,T - 1)\,x[n] = T \\ x[0] = 0 \end{cases}$$

Obtenemos una ecuación lineal en diferencias de primer orden con una condición inicial.

Ponemos $T = 0.1$ y $T = 0.05$ y graficamos los resultado y lo comparamos con la solución exacta.
Se aprecia que el ajuste es mejor para $T = 0.05$.

```
x[n_] := - (2 0.1 - 1) x[n - 1] + 0.1;
y[n_] := - (2 0.05 - 1) y[n - 1] + 0.05;
x[0] = y[0] = 0;
lista = Table[{n 0.1, x[n]}, {n, 0, 10}];
lista1 = Table[{n 0.05, y[n]}, {n, 0, 20}];
g = ListPlot[lista, PlotStyle → PointSize[0.01]];
g1 = ListPlot[lista1, PlotStyle → PointSize[0.01]];
b = Plot[1/2 (1 - e^(-2 t)), {t, 0, 1}];
Show[g, g1, b]
```



Ejercicio

Discretizar $\begin{cases} 2\,x' + 3\,x = e^{-t}\,u(t) \\ x(0) = 1 \end{cases}$ con paso $h = 0.1$ y calcular $x[n]$ para $0 \leq n \leq 4$.

Comparar con la solución del sistema continuo y graficar.

TRANFORMADA *Z*

Motivación

Hemos definido la transformada de Fourier mediante $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-i\,\omega\,t}\,dt$.

Si muestreamos la función $f(t)$ con un paso pequeño $T > 0$ tenemos $f[n] = f(n\,T) \in \mathfrak{S}$

Una suma de Riemann de la integral es $T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] \left(e^{i\,\omega\,T}\right)^{-n} T = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\,z^{-n}$ donde $z = e^{i\,\omega\,T}$.

La suma $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\,z^{-n}$ puede extenderse a cualquier z complejo, siempre que la serie sea convergente.

Esta extensión ha probado ser muy útil.

Definición

Dada $x \in \mathfrak{S}$ formamos la suma $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$ que es una serie de Laurent centrada en 0.
En general tiene un dominio de convergencia que es una corona $r < |z| < R$ y en esa corona define una función analítica que anotamos $X(z)$ y que se llama Transformada Z de x.
También escribimos la transformada como $Z(x)(z) = X(z)$.
La corona se llama la región de convergencia y se abrevia $R.C.$

Ejemplos

a) Para el escalón unitario $u[n]$ se tiene $U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$ que es una serie geométrica de razón z^{-1} y converge si $|z^{-1}| < 1$. Luego

$$U(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \quad \text{con} \quad R.C: |z| > 1$$

b) Para $x[n] = -u[-n-1]$ se tiene

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^{-n} = -\sum_{l=1}^{\infty} z^{l} = 1 - \sum_{l=0}^{\infty} z^{l} = 1 - \frac{1}{1-z} = \frac{z}{z-1} \quad \text{con } R.C: |z| < 1$$

Obtenemos la "misma función" que antes pero distinta $R.C.$
Luego al dar la transformada Z es fundamental dar la $R.C.$

c) Para la sucesión constante 1 se tiene la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n}$
La parte con $n > 0$ converge en $|z| > 1$ y la parte con $n < 0$ converge en $|z| < 1$
Luego la serie no converge en ningún z y la sucesión constante 1 no tiene transformada Z.

Vemos que la transformada Z está definida para algunas x en $\mathfrak{S}$.

En los ejemplos anteriores se vio que $u[n]$ y $u[-n-1]$ tienen transformada Z pero la suma $u[n] + u[-n-1] = 1$ no tiene transformada.

Z1 Linealidad
Si x e y tienen transformada Z con coronas de convergencia con intersección no vacía, entonces $x + y$ tiene transformada Z con $R.C.$ al menos en esa corona y vale la linealidad:

$$Z(x_1 + x_2) = Z(x_1) + Z(x_2) \quad \text{y} \quad Z(\alpha\, x) = \alpha\, Z(x)$$

Demostración: es inmediata

Z2 Desplazamientos $\quad Z(x[n-k])(z) = z^{-k} X(z)$
para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ con igual $R.C.$ que $X(z)$.
Demostración:

$$Z(x[n-k])(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n-k]\, z^{-n} = z^{-k} \sum_{-\infty}^{\infty} x[n-k]\, z^{-(n-k)} = z^{-k} X(z)$$

Z3 Inversión

Si x tiene transformada Z con $R.C.$: $r < |z| < R$ entonces $\tilde{x}[n] = x[-n]$ también dada por

$$Z(x[-n])(z) = X\left(z^{-1}\right) \qquad R.C.\ \frac{1}{R} < |z| < \frac{1}{r}$$

Demostración

$$Z(x[-n])(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[-k]\, z^{-k} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l]\, z^{l} = X\left(z^{-1}\right)$$

Z4 Convolución

Si x e y tienen convolución y transformada Z con una corona en común, entonces $x * y$ tiene transformada Z con $R.C.$ al menos en esa corona y vale

$$Z(x * y)(z) = X(z)\, Y(z)$$

Demostración

Supongamos que las transformadas de x e y tienen una corona en común en sus $R.C.$ y que existe la convolución. Entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (x * y)[n]\, z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, y[n-k]\right) z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n-k]\, z^{-n}\right)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, z^{-k} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n-k]\, z^{-(n-k)}\right) = X(z)\, Y(z)$$

Z5 Derivada $\qquad Z(n\, x[n]) = -z\, X'(z)$ con igual $R.C.$ que $X(z)$.

Demostración

$$X'(z) = \frac{d}{dz} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-n)\, x[n]\, z^{-n-1} = -z^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} n\, x[n]\, z^{-n}$$

Z6 Valor inicial Si $x \in \mathfrak{S}_+$ es causal y tiene transformada Z entonces la R.C. es de la forma $r < |z|$ y

$$\lim_{z \to \infty} X(z) = x[0]$$

Demostración

Si la transformada Z de x existe, es claro que tiene una región de convergencia del tipo $r < |z|$.

Por ello la serie de potencias $g(w) = \sum_{k=0}^{\infty} x[n]\, w^n$ tiene radio de convergencia $r^{-1} > 0$ y define una función continua en $|w| < R$. Luego $\lim_{w \to 0} g(w) = g(0) = x[0]$.

Pero $\lim_{z \to \infty} X(z) = \lim_{w \to 0} g(w) = x[0]$.

q.e.d.

Ejemplo

a) Sea $x[n] = a^n\, u[n] \in \mathfrak{S}_+$ entonces $X(z) = \frac{1}{1-a\,z^{-1}}$, $|z| > |a|$, que tiene un polo simple en a y $\lim_{z\to\infty} X(z) = 1 = x[0]$.

b) Derivando se obtiene la transformada de $n\, a^n\, u[n]$: $-z \frac{d}{d\,z}\left(\frac{1}{1-a\,z^{-1}}\right) = \frac{a\,z^{-1}}{\left(1-a\,z^{-1}\right)^2}$

que tiene un polo doble en a y RC: $|z| > |a|$. Se tiene $\lim_{z\to\infty} \frac{a\,z^{-1}}{\left(1-a\,z^{-1}\right)^2} = 0$.

c) Si ponemos $a = r\,e^{i\,\theta}$ en a) obtenemos $X(z) = \frac{1}{1-r\,e^{i\,\theta}\,z^{-1}} = \frac{1-r\,e^{-i\,\theta}\,z^{-1}}{1-2\,r\cos\theta\,z^{-1}+r^2\,z^{-1}}$

Tomando parte real y compleja, y suponiendo z real , obtenemos las transformadas

$$r^n \cos n\,\theta\;\; u[n] \quad\to\quad \frac{1-r\cos\theta\,z^{-1}}{1-2\,r\cos\theta\,z^{-1}+r^2\,z^{-2}} \;,\;\; |z| > r$$

$$r^n \operatorname{sen} n\,\theta\;\; u[n] \quad\to\quad \frac{r\operatorname{sen}\theta\,z^{-1}}{1-2\,r\cos\theta\,z^{-1}+r^2\,z^{-2}} \;,\;\; |z| > r$$

las cuales son válidas para cada z , en la corona $|z| > r$, por el principio de identidad.

Ejemplo

Hallamos la transformada Z de $x[n] = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } n \geq 0 \\ 1 & \text{si } n < 0 \end{cases}$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\,z^{-n} = \sum_{m=1}^{\infty} z^m + \sum_{n=0}^{\infty} (2\,z)^{-n} = \frac{1}{1-z} - 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}\,z^{-1}}$$

con corona de convergencia $\frac{1}{2} < |z| < 1$

Tabla de transformadas Z

$x[n]$	$X(z)$	$R.C.$
$\delta[n]$	1	toda z
$\delta[n-k]$	z^{-k}	toda z si $k \leq 0$, $z \neq 0$ si $k > 0$

$a^n\, u[n]$	$\frac{1}{1-a\,z^{-1}}$	$\lvert z \rvert > \lvert a \rvert$
$n\,a^n\, u[n]$	$\frac{a\,z^{-1}}{\left(1-a\,z^{-1}\right)^2}$	$\lvert z \rvert > a$
$n^2\, a^n\, u[n]$	$\frac{a\,z^{-1}\left(1 + a\, z^{-1}\right)}{\left(1-a\,z^{-1}\right)^3}$	$\lvert z \rvert > a$
$r^n \cos n\,\theta\;\; u[n]$	$\frac{1-(r\cos\theta)\,z^{-1}}{1-(2\,r\cos\theta)\,z^{-1}+r^2\,z^{-2}}$	$\lvert z \rvert > r$
$r^n\, \mathrm{sen}\, n\,\theta\;\, u[n]$	$\frac{(r\,\mathrm{sen}\,\theta)\,z^{-1}}{1-(2\,r\cos\theta)\,z^{-1}+r^2\,z^{-2}}$	$\lvert z \rvert > r$
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z \rvert < 1$

Problema de inversión

Supongamos que la transformada Z de una sucesión x es $X(z) = \frac{z}{z^2-1}$

¿Podemos conocer x? En general no. Pero si además conocemos la $R.C$: $\lvert z \rvert > 1$ se puede recuperar x.

En efecto se tiene la siguiente fórmula de inversión que muestra que hay una única x.

Teorema Fórmula de inversión

Sea $x \in \mathfrak{S}$ que tiene transformada Z.

Conociendo $X(z)$ y la corona de convergencia podemos recuperar x.

Demostración

Si la corona es $r < \lvert z \rvert < R$ tomamos en ella la circunferencia C con centro en 0 y radio $\frac{r+R}{2}$.

La serie $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\square} x[n]\, z^{-n}$ converge uniformemente sobre la circunferencia C.

Multiplicamos por z^k e integramos:

$$\int_C z^k\, X(z)\, dz = \int_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n+k}\, dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \int_C z^{-n+k}\, dz$$

Por la convergencia uniforme es lícito intercambiar la serie con la integral.

Además se sabe que $\int_C z^{-1}\, dz = 2\,\pi\, i$ y por Barrow $\int_C z^{-r}\, dz = 0$ si $r \neq -1$.

Luego en la serie los términos con $-n+k \neq -1$ se anulan y queda sólo el término que contine $x[k+1]$

$$\frac{1}{2\,\pi\, i} \int_C z^k\, X(z)\, dz = x[k+1]$$

q.e.d.

Volviendo al problema anterior, si $X(z) = \frac{z}{z^2-1}$ con $R.C.$ $|z| > 1$ entonces

$$x[k+1] = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2} \frac{z\,z^k}{z^2-1}\,dz \qquad \text{ó} \qquad x[n] = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2} \frac{z^n}{z^2-1}\,dz$$

Se puede calcular por residuos.
Para $n \geqslant 0$ hay dos polos simples en $z = \pm 1$ y la suma de residuos es

$$\frac{1}{2} + (-1)^n\,\frac{1}{2} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ 1 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Para $n < 0$ ponemos para claridad $n = -m$ con $m > 0$ y hacemos el cambio de variables $z = w^{-1}$:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2} \frac{z^n}{z^2-1}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2} \frac{1}{z^m(z^2-1)}\,dz = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=\frac{1}{2}} \frac{w^m}{w^2-1}\,dw = 0$$

Luego $x[n] = \{0_0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \ldots.\} = \frac{1}{2}[1 + (-1)^n]\,u[n-1]$

Si $x \in \mathfrak{S}_+$ sabemos que la región de convergencia es $|z| > R$ y $X(\infty) = \lim_{z\to\infty} X(z)$ es finito.
La recíproca es cierta según se prueba en el siguiente teorema.

Teorema sobre las causales
Sea $F(z)$ una función analítica en la corona $|z| > R$ con $\lim_{z\to\infty} F(z)$ finito.
En esas condiciones existe $x \in \mathfrak{S}_+$ tal que $X(z) = F(z)$.
Demostración
Sea C la circunferencia de centro 0 y radio $2R$. Definimos la sucesión

$$x[k+1] = \frac{1}{2\pi i}\int_C z^k\,F(z)\,dz$$

Sea $k + 1 < 0$.
Hacemos el cambio de variables $z = \frac{1}{w}$ en la integral y ponemos $C_r = \{|w| = r\}$ con $r = \frac{1}{2R}$.

$$x[k+1] = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} w^{-k}\,F\left(\frac{1}{w}\right)\left(-\frac{1}{w^2}\right)dw = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} w^{-k-2}\,F\left(\frac{1}{w}\right)dw$$

Se tiene $-k-2 \geqslant 0$, y por hipótesis la función $F\left(\frac{1}{w}\right)$ es analítica para $0 < |w| < \frac{1}{R}$ y tiene límite finito para $w \to 0$. Luego $\lim_{w\to 0} w^{-k-2}\,F\left(\frac{1}{w}\right)$ es finito y la singularidad es evitable, y por lo tanto es

una función analítica en el disco completo $|w| < \frac{1}{R}$. Por el teorema de Cauchy, la integral es cero.
Por lo tanto $x[n] = 0$ si $n < 0$ y por ello $x \in \mathfrak{S}_+$.

Además si el desarrollo de Laurent de $F(z)$ en $|z| > R$ es $F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n}$ entonces

$$x[k+1] = \frac{1}{2\pi i} \int_C z^k F(z)\, dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{2\pi i} \int_C z^k z^{-n}\, dz = a_{k+1}$$

Luego la transformada Z de la sucesión causal $x[n]$ es $F(z)$.

q.e.d.

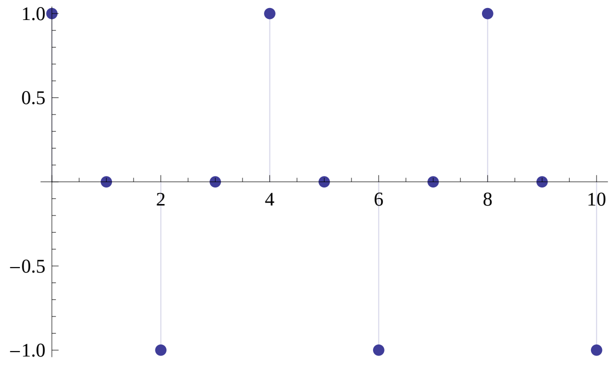
Ejemplo

Sea $F(z) = \frac{z^2}{z^2+1}$ con R.C. $|z| > 1$. Es $F(\infty) = 1$

Se tiene $\frac{z^2}{z^2+1} = \frac{1}{1+z^{-2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{-2n} \Rightarrow x[n] = \{1_0, 0, -1, 0, 1, 0, ...\}$ que es causal y

periódica en $n \geqslant 0$ de período 4 : $x[n+4] = x[n]$. Es claro que $x[n] = \cos\left[\frac{n\pi}{2}\right] u[n]$

```
DiscretePlot[Cos[n π/2], {n, 0, 10}, PlotStyle → PointSize[0.02]]
```



Cálculo de la inversa por fracciones simples

Ejemplo 1

Calcularemos la inversa de $X(z) = \frac{z}{z^2-1}$, $|z| > 1$ por fracciones simples y la tabla.

$$X(z) = \frac{z}{z^2-1} = z^{-1}\frac{1}{1-z^{-2}} = z^{-1}\,\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1+z^{-1}}\right]$$

El corchete tiene inversa $u[n] + (-1)^n u[n] = (1+(-1)^n)\,u[n]$ y z^{-1} significa retraso en 1 :

$$x[n] = \frac{1}{2}\left[1+(-1)^{n-1}\right]u[n-1]$$

que coincide con la calculada previamente por residuos.

En este caso se puede hallar directamente por desarrollo en serie de Laurent

$$X(z) = z^{-1}\frac{1}{1-z^{-2}} = z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} z^{-2n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-2n-1}$$

y leyendo los coeficientes de esta serie hallamos $x = \{\ldots, 0, 0_0, 1, 0, 1, 0, \ldots\}$.

Ejemplo 2

Calcular la antitransformada Z de $X(z) = \frac{-1+3z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$ si R.C: $|z| > 1$

$$X(z) = \frac{-1+3z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = -\frac{1}{(1-z^{-1})^2} + 3\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = -z\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} + 3\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

Luego $x[n] = -(n+1)\,u[n+1] + 3n\,u[n] = (2n-1)\,u[n]$

Ejemplo 3

Calcular la antitransformada Z de $X(z) = \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-2z^{-1})}$ con R.C: $1 < |z| < 2$

Desarrollamos en serie de Laurent en la corona.

$$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-2z^{-1})} = -\frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1-2z^{-1}} = -\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{z}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

Luego leyendo los coeficientes de edst desarrollo de Laurent obtenemos

$$x = \left\{\ldots\ldots, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -1_0, -1, -1, -1, \ldots.\right\}$$

Ejemplo 4

Calcular la antitransformada Z de $X(z) = \frac{1}{1+z^{-1}+z^{-2}}$ con R.C: $r < |z|$

Como las raíces del denominador son complejas, mirando la tabla de transformadas, tratamos de escribir

$$X(z) = \frac{1}{1+z^{-1}+z^{-2}} = a\ \frac{1-\cos\theta\ z^{-1}}{1-2\,r\cos\theta\ z^{-1}+r^2\ z^{-2}} + b\ \frac{\operatorname{sen}\theta\, z^{-1}}{1-2\,r\cos\theta\ z^{-1}+r^2\ z^{-2}}$$

El denominador es $1 + z^{-1} + z^{-2} = 1 - 2\,r\cos\theta\ z^{-1} + r^2\,z^{-2}$ de donde $r = 1$, $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

Eligiendo $\theta = (2/3)\,\pi$ resulta $\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\frac{1}{1+z^{-1}+z^{-2}} = a\ \frac{1+\frac{1}{2}\ z^{-1}}{1+z^{-1}+z^{-2}} + b\ \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\ z^{-1}}{1+z^{-1}+z^{-2}} = \frac{1+\frac{1}{2}\ z^{-1}}{1+z^{-1}+z^{-2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\ \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\ z^{-1}}{1+z^{-1}+z^{-2}}$$

Luego $\quad x[n] = \left(\cos\frac{2\pi n}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\frac{2\pi n}{3}\right) u[n]$ que tiene período 3 .

Ejercicio

Calcular la transformada inversa de

$\frac{z^{-1}}{1+2z^{-1}+2z^{-2}}$, $|z| > 1$; $\frac{2}{(1+z^{-1})(1-2z^{-1})}$, $|z| > 2$; $\frac{2-3z^{-1}}{1+z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}$, $|z| > R$

$\frac{1}{1-z^{-2}}$, $|z| < 1$; $\frac{z}{(1-z^{-1})(1+3z^{-1})^2}$, $1 < |z| < 3$; $\frac{z^{-2}}{1+z^{-1}+z^{-2}}$, $|z| > 1$

Ejercicio

1. Calcular la convolución $(-1)^n u[n] * \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n} n\right) u[n]$ utilizando transformada Z .
   Comprobar los primeros valores.

   Rta: $\frac{1}{2}\left[(-1)^{n+1} + \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right\} u[n]$

2. Calcular la convolución $u[n] * \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3} n\right) u[n]$ utilizando transformada Z .
   Comprobar los primeros valores.

Deconvolución. Ecuaciones de convolución.

Usando la transformada Z se pueden resolver ecuaciones en $x[n]$ del tipo:

a) $x * a = b$ "ecuación de deconvolución"
b) $x = a + x * b$ "ecuación de convolución" equivale a una anterior: $x * (\delta - b) = a$

Una ecuación en diferencias lineal es del tipo a) con a finita y causal. En efecto, la ecuación

$$x * \{(a_0)_0,\ a_1,\ ..,\ a_r\} = d[n]$$

equivale a la ecuación en diferencias

$$\sum_{k=0}^{r} a_k\, x[n-k] = d[n]$$

Ejemplo 1

$$x * \{1_0,\ 2,\ 1\} = \{1_0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1\}$$

Tomando transformada Z se tiene $X\left(1+2\,z^{-1}+x^{-2}\right)=1+z^{-1}+z^{-3}+z^{-4}$ y despejando

$$X=\frac{1+z^{-1}+z^{-3}+z^{-4}}{1+2\,z^{-2}+z^{-2}}=\frac{\left(1+z^{-1}\right)+z^{-3}\left(1+z^{-1}\right)}{\left(1+z^{-1}\right)^2}=\frac{1}{1+z^{-1}}+z^{-3}\,\frac{1}{1+z^{-1}}$$

Antitransformando obtenemos

$$x[n]=(-1)^n\,u[n]\;+(-1)^{n-3}\,u[n-3]=\{1_0,\;-1,\;1\}$$

Verificar esta solución.

Ejemplo 2

$$x*u=\{1,\,-1_0\}$$

Tomando transformada Z se tiene $X\;\frac{1}{1-z^{-1}}=z-1$ y despejando $X=z-2\;+\;z^{-1}$

Antitransformando obtenemos $x[n]=\{1,\;-2_0,\;1\}$ que no es causal. Verificar la solución.

Ejemplo 3

$$x=\delta+\;x*u$$

Transformando queda $X=1+X\;\frac{1}{1-z^{-1}}$ y despejando $X=-\frac{1-z^{-1}}{z^{-1}}=1-z$

Luego $x[n]=\{-1,\,1_0\}$. Comprobar esta solución.

Ejemplo 4

$$x=u+\;x*\{1_0,\,1\}$$

Transformando queda $X=\;\frac{1}{1-z^{-1}}+X\left(1+z^{-1}\right\}$ y despejando $X=-\frac{z}{1-z^{-1}}$

Luego $x[n]=-u[n+1]$ que no es causal. Comprobar esta solución.

Ejemplo 5 Transmisión con falla de arrastre.

Se transmite la señal $x[n]$ y se recibe $y[n]=x[n]+\;\alpha\,x[n-1]$ con $0<\alpha<1$.
Queremos conocer la señal emitida $x[n]$ a partir de la recibida $y[n]$.
Para ello transformamos Z :

$$Y(z)=X(z)\left(1+\alpha\,z^{-1}\right)\quad\Rightarrow\qquad X(z)=\frac{Y(z)}{1+\alpha\,z^{-1}}=Y(z)\,D(z)$$

Luego $x=y*d$ con $d[n]=(-1)^n\,\alpha^n\,u[n]$.

Ejercicio

Resolver las ecuaciones y comprobar la solución obtenida.

a) $x = u + \prod_{[0,2]} * x$ Rta: $x = \{-1,\ 0_0,\ -1,\ 0,\ -1,\ 0,\ \ldots.\}$

b) $2\,x = \delta + u * x$ Rta: $x = \{1_0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \ldots\ \ldots.\}$

c) $x * u = \prod_{[1,3]}$ Rta: $x = \{0_0,\ 1,\ 0,\ 0,\ -1\}$

d) $x * \prod_{[1,2]} = u$ Rta: $x = \{1,\ 0_0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \ldots.\} = \frac{1}{2}\left[1 + (-1)^{n+1}\right]\ u[n+1]$

e) $x * \prod_{[0,1]} = \delta$

f) $x * \{1_0,\ 1\} = \{1_0,\ -1\}$ Rta : $x[n] = \delta[n] + 2\,(-1)^n\ u[n-1]$

g) $x * \{-1,\ 1_0,\ 1\} = \{1_0,\ 0,\ 0,\ 1\}$

h) $x = \{1_0,\ -1\} + \{1_0,\ 1\} * 2\,x$

Ejercicio

a) Resolver $x * \alpha^n\, u[n] = \beta^n\, u[n]$ para $\alpha \neq \beta$

b) Graficar la solución para $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\beta = -1$

c) Estudiar el caso $\alpha = \beta$

Ecuación lineal

Sea la ecuación lineal en diferencias de orden s con reposo inicial

$$a_0\, x[n] + a_1\, x[n-1] + \ldots.+ a_s\, x[n-s] = d[n] \quad \text{con} \quad x[-1] =. .. = x[-s] = 0$$

Si la entrada $d[n]$ es causal la salida $x[n]$ también lo es pues iterando hacia atrás se tiene $x[n] = 0$ para cada $n < 0$. Podemos hallar la solución mediante transformada Z . Para ello transformamos la ecuación:

$$a_0\, X(z) + a_1\, z^{-1}\, X(z) + \ldots\ .. + a_s\, z^{-s}\, X(z) = D(z)$$

Despejando queda

$$X(z) = \frac{D(z)}{a_0 + a_1\, z^{-1} + \ldots. + a_s\, z^{-s}} \qquad \text{con} \qquad \text{R.C.}\ \ |z| > r$$

En particular para $d = \delta$ obtenemos la respuesta causal $h[n]$ con transformada Z

$$H(z) = \frac{1}{a_0 + a_1\, z^{-1} + \ldots. + a_s\, z^{-s}} \qquad \text{con} \quad \text{R.C.}\ \ |z| > r$$

El denominador se factoriza con sus raíces que son los polos de $H(z)$:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1\, z^{-1} + \ldots\ .. + a_s\, z^{-s} &= z^{-s}\left[\, a_0\, z^s + a_1\, z^{s-1} + \ldots + a_s\right] \\ &= z^{-s}\, a_0\, (z - r_1) \ldots\ ..\, (z - r_s) = a_0\left(1 - r_1\, z^{-1}\right) \ldots \left(1 - r_s\, z^{-1}\right) \end{aligned}$$

Vemos que los polos de $H(z)$ son justamente las raíces características de la ecuación en diferencias.

En general, sea la ecuación de orden s

$$a_0\, x[n] + a_1\, x[n-1] + ...+ a_s\, x[n-s] = b_0\, d[n] + b_1\, d[n-1] + ... + b_r\, d[n-r]$$

con reposo inicial $x[-1] =. .. = x[-s] = 0$
La respuesta causal a la δ tiene por transformada Z

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + ... + b_r z^{-r}}{a_0 + a_1 z^{-1} + ... + a_s z^{-s}} \quad \text{con} \quad \text{R.C.} \quad |z| > r$$

Los polos de $H(z)$ son nuevamente las raíces características de la ecuación en diferencias, pero ahora puede haber cancelación de polos.

El límite

$$\lim_{z\to\infty} H(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + ... + b_r z^{-r}}{a_0 + a_1 z^{-1} + ... + a_s z^{-s}} = \frac{b_0}{a_0}$$

es finito. Por ello si escribimos $H(z)$ como cociente de polinomios en z el grado del numerador no puede ser mayor que el grado del denominador.

Ejemplo 1

Para $\quad x[n] + \frac{1}{2} x[n-1] - \frac{1}{2} x[n-2] = \delta[n] \quad$ con $\quad x[-2] = x[-1] = 0$

se tiene

$$H(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} z^{-1} - \frac{1}{2} z^{-2}} = \frac{1}{\left(1 + z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right)} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} + \frac{2}{3} \frac{1}{1 + z^{-1}}$$

y entonces $\quad h[n] = \left(\frac{1}{3} 2^{-n} + \frac{2}{3} (-1)^n\right) u[n]$

Calculamos y comprobamos los primeros valores.

```
Table[1/3 2^-n + 2/3 (-1)^n , {n, 0, 5}]
```

$$\left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{5}{8}, \frac{11}{16}, -\frac{21}{32}\right\}$$

Ejemplo 2

Para $\quad x[n]+\frac{1}{2}\,x[n-1]-\frac{1}{2}\,x[n-2]=\delta[n]+\delta[n-1]\quad$ con $\quad x[-2]=x[-1]=0$

se tiene

$$H(z)=\frac{1+z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}}=\frac{\left(1+z^{-1}\right)}{\left(1+z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\qquad \text{y}\qquad h[n]=2^{-n}\,u[n]$$

Se ha cancelado un polo y el sistema es equivalente al de primer orden

$$x[n]-\frac{1}{2}\,x[n-1]=\delta[n]\quad \text{con}\quad x[-1]=0$$

Observemos que restando a esta ecuación el paso anterior $\quad x[n-1]-\frac{1}{2}\,x[n-2]=d[n-1]\quad$ obtenemos la ecuación en diferencias inicial $\quad x[n]+\frac{1}{2}\,x[n-1]-\frac{1}{2}\,x[n-2]=d[n]+d[n-1]$.

Ejercicio

a) Hallar la solución de $\quad x[n]-x[n-1]=(-1)^n\,u[n]\quad,\ x[-1]=0$

b) Idem $\quad x[n]+x[n-1]+\frac{1}{4}\,x[n-2]=\delta[n]-\delta[n-1]\ ,\ x[-2]=x[-1]=0\quad$ Rta: $(3\,n+1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

c) Hallar la salida causal de $\quad 2\,x[n]+x[n-1]-x[n-2]=u[n]$

d) Hallar la salida causal de $\quad x[n]-x[n-1]+\frac{1}{2}\,x[n-2]=\delta[n]$

Ejemplo 3

Sea la transformada $H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{8 + 6 z^{-1} + z^{-2}}$ con $|z| > r$.
La ecuación lineal asociada es

$$8\, x[n] + 6\, x[n-1] + x[n-2] = d[n] - d[n-1] \qquad \text{con} \quad x[-1] = x[-2] = 0$$

Antitransformando $H(z)$ obtenemos directamente la respuesta causal a la δ :

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{8 + 6 z^{-1} + z^{-2}} = \frac{3}{4} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} z^{-1}} - \frac{5}{8} \frac{1}{1 + \frac{1}{4} z^{-1}}$$

$$h[n] = \left[\frac{3}{4} \left(-\frac{1}{2}\right)^n - \frac{5}{8} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \right] u[n]$$

Calculamos los primeros valores dados por esta expresión y con ellos comprobamos la ecuación en sus primeros valores.

```
x = Table[3/4 (-1/2)^n - 5/8 (-1/4)^n, {n, 0, 5}]
```

$$\left\{\frac{1}{8}, -\frac{7}{32}, \frac{19}{128}, -\frac{43}{512}, \frac{91}{2048}, -\frac{187}{8192}\right\}$$

$n = 1; 8\, x[[n]]$
$n = 2; 8\, x[[n]] + 6\, x[[n-1]]$
$n = 3; 8\, x[[n]] + 6\, x[[n-1]] + x[[n-2]]$
$n = 4; 8\, x[[n]] + 6\, x[[n-1]] + x[[n-2]]$

1

-1

0

0

Ejercicio

a) Hallar la solución causal de $x[n] - x[n-1] = (-1)^n\, u[n]$
b) Hallar la solución causal de $x[n] + x[n-1] = (-1)^n\, u[n]$
c) Hallar la respuesta causal a la δ de $x[n] + \frac{1}{2}\, x[n-1] = d[n]$
d) Hallar la respuesta causal de $x[n] + x[n-1] + x[n-2] = u[n]$ Rta: $\frac{1}{3}\left[1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\, n\right)\right]\, u[n]$
e) Hallar la respuesta causal de $x[n] + x[n-1] + \frac{1}{4}\, x[n-2] = \delta[n] - \delta[n-1]$ Rta: $(3\, n + 1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

Autocorrelación

Definimos la "autocorrelación" de $x[n]$ mediante

$$\mathcal{A}c(x)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, x[n+k]$$

siempre que la serie sea convergente.

a) Esta definición se puede expresar como una convolución pues se tiene

$$\mathcal{A}c(x) = x * \tilde{x}$$

donde $\tilde{x}[n] = x[-n]$ es la simétrica de x.
En efecto:

$$\mathcal{A}c(x)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, x[n+k] = \sum_{h=-\infty}^{\infty} x[-h]\, x[n-h] = \sum_{h=-\infty}^{\infty} \tilde{x}[h]\, x[n-h] = (\tilde{x} * x)[n]$$

Ejemplo

La autocorrelación de $x = \prod_{[-1,2]}$ es $\mathcal{A}c(x) = \{1,\ 2,\ 3,\ 4_0,\ 3,\ 2,\ 1\}$ y se observa que es par.

b) La autocorrelación siempre es par: $\mathcal{A}c(x)[-n] = \mathcal{A}c(x)[n]$
En efecto, hacemos el cambio de variable $-n + k = h$ en la suma:

$$\mathcal{A}c(x)[-n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, x[-n+k] = \sum_{h=-\infty}^{\infty} x[n+h]\, x[h] = \mathcal{A}c(x)[n]$$

c) La transformada Z de $\mathcal{A}c(x) = \tilde{x} * x$ es el producto $X\left(\frac{1}{z}\right) X(z)$.

Estudiamos su R.C.

Si $r < |z| < R$ es la RC de $X(z)$ entonces $\frac{1}{R} < |z| < \frac{1}{r}$ es la RC de $X\left(\frac{1}{z}\right)$ y el producto tiene $R.C$:

$$X\left(\frac{1}{z}\right) X(z) \quad \text{con} \quad \text{RC: máximo}\left(\frac{1}{R}, r\right) < |z| < \text{mínimo}\left(\frac{1}{r}, R\right).$$

Ejemplo

$$x[n] = 2^{-n} u[n] \quad \text{tiene} \quad X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2} z^{-1}}, \quad \text{RC}: \frac{1}{2} < |z| < \infty$$

$$\tilde{x}[n] = x[-n] = 2^{n} u[-n] \quad \text{tiene} \quad X\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{2} z}, \quad \text{RC}: \quad |z| < 2$$

Luego la autocorrelación tiene transformada Z

$$X(z) X\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2} z^{-1}\right)\left(1-\frac{z}{2}\right)} \quad \text{con} \quad \text{RC}: \frac{1}{2} < |z| < 2$$

Separando en fracciones simples y desarrollando en serie en la RC queda

$$\frac{4}{3} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{2}{3} \frac{z^{-1}}{1-\frac{z^{-1}}{2}} = \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n}}{2^{n}} - \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n-1}}{2^{n}}$$

Luego leemos la antitransformada $\left\{ \ldots, \frac{1}{2^2}\left(\frac{4}{3}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right), \left(\frac{4}{3}\right)_0, \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right), \frac{1}{2^2}\left(\frac{4}{3}\right), \ldots \right\}$ que es par.

Ahora calculamos la autocorrelación directamente. Basta hacerlo para los positivos $n \geq 0$ por ser par.

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, x[n+k] = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\, 2^{-(n+k)} = 2^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2k} = 2^{-n} \frac{1}{1-2^{-2}} = \frac{4}{3} 2^{-n}$$

Luego

$$\mathcal{A}c(x) = \frac{4}{3} 2^{-|n|}$$

que naturalmente coincide con la calculada antes.

Ejercicio

a) Calcular la autocorrelación de $\prod_{[0,3]}$; $r[n] \prod_{[1,3]}$ y $\{0_0, 1, -1, 1\}$ y graficarlas.

b) Calcular la autocorrelación de $a^n u[n]$ para $|a| < 1$.

Sobremuestreo

Dada $x[n]$ una función discreta, consideramos el "sobremuestreo" $y[n] = x[2n]$.
¿ Qué relación existe entre las transformadas $X(z)$ e $Y(z)$? Veamos algunos ejemplos ilustrativos.

a) Si $x[n] = a^n u[n]$ entonces $X(z) = \frac{1}{1-a z^{-1}}$ con $R.C.$ $|z| > |a|$.

Se tiene $y[n] = a^{2n} u[n]$ e $Y(z) = \frac{1}{1-a^2 z^{-1}}$ con $R.C.$ $|z| > |a|^2$.

Ejemplo

Si $x[n] = (-1)^n u[n]$ entonces $X(z) = \frac{1}{1+z^{-1}}$ con $R.C:$ $|z| > 1$

$y[n] = u[n]$ con $Y(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{1}{1-(-1)^2 z^{-1}}$ con $R.C$ $|z| > 1$

b) Si $x[n] = (\alpha a^n + \beta b^n) u[n]$ entonces $X(z) = \frac{\alpha}{1-a z^{-1}} + \frac{\beta}{1-b z^{-1}}$ con $R.C.$ $|z| > r$.

Se tiene $y[n] = \left(\alpha a^{2n} + \beta b^{2n}\right) u[n]$ e $Y(z) = \frac{\alpha}{1-a^2 z^{-1}} + \frac{\beta}{1-b^2 z^{-1}}$ con $R.C.$ $|z| > R$.

Ejemplo

Si $x[n] = \frac{1}{2} \{ 1 - (-1)^n u[n] \} = \frac{1}{2} u[n] - \frac{1}{2} (-1)^n u[n]$ entonces

$$X(z) = \frac{1}{2} \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{2} \frac{1}{1+z^{-1}} \qquad \text{con} \quad R.C: \; |z| > 1$$

$y[n] = 0$ con $Y(z) = 0 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-(-1)^2 z^{-1}} = 0$ con $R.C: \; |z| > 0$

Ejercicio

a) Estudiar el sobremuestreo de $x[n] = (-1)^n\, u[n]$ y su transformada.
b) Idem para la rampa $r[n]$.

Submuestreo

Sea $x[n]$ una función discreta y $w[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right] & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$.

Se tiene

$x = \{ \; ...., x_{-2}, \; x_{-1}, \; x_0, \; x_1, \; x_2, \; ....\}$ $\qquad w = \{ \; ... .0, \; x_{-2}, \; 0, \; x_{-1}, \; 0, \; x_0 \;, \; 0, \; x_1, \; 0, \; x_2, \; 0. ...\}$

Intercala un cero entre los valores de x .

¿ Qué relación existe entre las transformadas $X(z)$ y $W(z)$?

Para $x[n]$ es $X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$ con $R.C.$ $r < |z| < R$, entonces

$W(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w[n]\, z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w[2\,k]\, z^{-2\,k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, z^{-2\,k} = X\left(z^2\right)$ con $R.C.$ $r < |z| < R$.

Ejemplo

$x[n] = u[n]$ y $X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$ con $R\,C: \; |z| > 1$

$w[n] = \{ \, .., \; 0, \; 1_0, \; 0, \; 1, \; 0, \; 1, \; ....\}$

Se tiene $W(z) = X\left(z^2\right)$ pues

$X\left(z^2\right) = \frac{1}{1-z^{-2}} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1+z^{-1}}\right\}$ cuya antitransformada es $\frac{1}{2}\{\,u[n] + (-1)^n\, u[n]\,\} = w[n]$

Ejercicio

a) Sea $x[n]$ una sucesión y consideremos $y[n] = x[3\,n]$.
¿ Qué relación existe entre las transformadas $X(z)$ e $Y(z)$? Hacer algunos ejemplos ilustrativos.
b) Intercalamos 2 ceros entre todos los valores de $x[n]$ obteniendo una nueva sucesión

$$\{\ \ldots,\ x[-2],\ 0,\ 0,\ x[-1],\ 0,\ 0,\ x[0],\ 0,\ 0,\ x[1],\ 0,\ 0,\ x[2],\ \ldots.\}$$

La transformada Z de esta sucesión es $X\left(z^3\right)$.

TRANSFORMADA Z UNILATERAL Z_+

Para resolver ecuaciones lineales en diferencias con condiciones iniciales es conveniente introducir la transformada Z unilateral que se anota Z_+. Juega el mismo papel que la Transformada de Laplace para la resolución de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales.

Sea $x \in \mathfrak{S}$. Definimos $X_+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$ que tiene una RC $|z| > r$.
No se usan los valores de $x[n]$ para $n < 0$ y coincide con la transformada Z si $x \in \mathfrak{S}_+$.
Observamos que no hace falta aclarar cuál es la región de convergencia.
Al invertir la transformada Z_+ se recuperan los valores $x[n]$ con $n \geqslant 0$.

Propiedades.
En condiciones adecuadas valen las siguientes propiedades.

1. Es lineal: $a\, x[n] + b\, y[n]$ tiene transformada Z_+ dada por $a\, X_+(z) + b\, Y_+(z)$

2. Retraso: $x[n-1]$ tiene por transformada Z_+ a

$$\sum_{n=0}^{\infty} x[n-1]\, z^{-n} = x[-1] + z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} x[n-1]\, z^{-(n-1)} = x[-1] + z^{-1}\, X_+(z)$$

Luego si	$x[n]$	tiene trasformada	$X_+(z)$
entonces	$x[n-1]$	tiene transformada	$x[-1] + z^{-1}\, X_+(z)$
	$x[n-2]$	tiene transformada	$x[-2] + x[-1]\, z^{-1} + z^{-2}\, X_+(z)$

3. La transformada Z_+ de $n\, x[n]$ es $-z\, \frac{d}{d\,z}\, X_+(z)$

4. Si $x \in \mathfrak{S}_+$ e $y \in \mathfrak{S}_+$ entonces la transformada Z_+ de la convolución $x * y$ es $X_+(z)\, Y_+(z)$
Pues si $x \in \mathfrak{S}_+$ e $y \in \mathfrak{S}_+$ entonces $x * y \in \mathfrak{S}_+$ y como sobre causales $Z = Z_+$ se tiene

$$Z_+(x * y) = Z(x * y) = Z(x)\ Z(y) = Z_+(x)\ Z_+(y)$$

5. Valor inicial $\lim_{z \to \infty} X_+(z) = x[0]$
Pues usando la propiedad del valor inicial sobre causales $\lim_{z \to \infty} X_+(z) = \lim_{z \to \infty} X(z\, u) = x[0]\, u[0] = x[0]$

Ejemplo 1

Resolver la ecuación $x[n] + 3\, x[n-1] = u[n]$ con la condición inicial $x[-1] = 2$

Transformando Z_+ la ecuación obtenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, z^{-n} + 3 \sum_{n=0}^{\infty} x[n-1]\, z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$$

$$X_+(z) + 3\, x[-1] + 3\, z^{-1}\, X_+(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

Luego $X_+(z) = \frac{1}{1+3\,z^{-1}} \left(\frac{1}{1-z^{-1}} - 6 \right) = \frac{-5+6\,z^{-1}}{\left(1+3\,z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)} = \frac{1}{4}\, \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{21}{4}\, \frac{1}{1+3\,z^{-1}}$

y la Z_+ antitransformada es $x[n] = \frac{1}{4} - \frac{21}{4}\, (-3)^n$ para $n \geqslant 0$.

Ejemplo 2

Resolver la ecuación $x[n] - \frac{1}{2}\, x[n-1] = \delta[n-1]$ con la condición inicial $x[-1] = 1$.
Podemos calcular los primeros valores en forma iterativa:

$x[0] - \frac{1}{2}\, x[-1] = 0$ y por lo tanto $x[0] = \frac{1}{2}$

$x[1] - \frac{1}{2}\, x[0] = 1$ y de allí $x[1] = \frac{5}{4}$ etc

Trasformando Z_+ queda:

$$X_+(z) - \frac{1}{2} \left\{ 1 + z^{-1}\, X_+(z) \right\} = z^{-1} \quad \Rightarrow \quad X_+(z) = \frac{\frac{1}{2} + z^{-1}}{1-\frac{1}{2}\, z^{-1}} = \frac{1}{2}\, \frac{1}{1-\frac{1}{2}\, z^{-1}} + z^{-1}\, \frac{1}{1-\frac{1}{2}\, z^{-1}}$$

La antitransformada es

$$x[n] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

Comprobamos que $x[0]$, $x[1]$ coinciden con los calculados previamente.

Ejemplo 3

Resolver la ecuación $x[n] + x[n-1] + x[n-2] = u[n]$ con $x[-1] = 1$, $x[-2] = 0$.

Los primeros valores se calculan iterativamente y son:

$$x[0] = 0,\ \ x[1] = 0,\ \ x[2] = 1,\ \ x[3] = 0,\ \ x[4] = 0\,,\ \ x[5] = 1\,,\ \ \text{etc}$$

Transformando Z_+ queda:

$$X_+(z) + 1 + z^{-1}\,X_+(z) + z^{-1} + z^{-2}\,X_+(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

Despejando proponemos una separación acorde con las raíces del denominador:

$$X_+(z) = z^{-2}\,\frac{1}{\left(1 + z^{-1} + z^{-2}\right)\left(1-z^{-1}\right)} = z^{-2}\left(A\,\frac{1 + \frac{1}{2}\,z^{-1}}{1 + z^{-1} + z^{-2}} + B\,\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\,z^{-1}}{1 + z^{-1} + z^{-2}} + C\,\frac{1}{1-z^{-1}}\right)$$

Resolviendo encontramos que $A = \frac{2}{3}$, $B = 0$, $C = \frac{1}{3}$.
Antitransformando hallamos la solución

$$x[n] = \left(\frac{2}{3}\cos\frac{2\pi\,(n-2)}{3} + \frac{1}{3}\right)u[n-2]$$

que coincide en los primeros valores hallados iterativamente.
Observemos que la solución se escribe, desarrollando el coseno de la diferencia, así:

$$x[n] = \left(-\frac{1}{3}\cos\frac{2\pi}{3}\,n - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}\,n + \frac{1}{3}\right)u[n]$$

Ejemplo 4

$$\begin{cases} x[n] - 2\,x[n-1] + x[n-2] = \delta[n] \\ x[-1] = 0\,,\ \ x[-2] = 1 \end{cases}$$

$$X_+(z)\ -\ 2\left\{x[-1] + z^{-1}\,X_+(z)\right\} + \left\{x[-2]\ +\ x[-1]\,z^{-1} + z^{-2}\,X_+(z)\right\} = 1$$

$$X_+(z)\left\{1 - 2\,z^{-1} + z^{-2}\right\} = 0$$

Luego $X_+(z) = 0$ y por lo tanto $x[n] = 0$ para cada $n \geqslant 0$
Se puede comprobar iterativamente

```
δ[n_] := If[n ⩽ 0, 1, 0]
x[n_] := 2 x[n - 1] - x[n - 2] + δ[n]
x[-1] = 0; x[-2] = 1;
Table[x[n], {n, 0, 5}]
```

```
{0, 0, 0, 0, 0, 0}
```

Ejemplo 5

$$\begin{cases} x[n] - 2\,x[n-1] + x[n-2] = \delta[n] \\ x[-1] = 1\,,\; x[-2] = 1 \end{cases}$$

$$X_+(z) - 2\left\{x[-1] + z^{-1}\,X_+(z)\right\} + \left\{x[-2] + x[-1]\,z^{-1} + z^{-2}\,X_+(z)\right\} = 1$$

$$X_+(z)\left\{1 - 2\,z^{-1} + z^{-2}\right\} = 2 - z^{-1} \quad \Rightarrow \quad X_+(z) = \frac{2-z^{-1}}{1-2\,z^{-1}+z^{-2}} = \frac{2-z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$$

Separamos en fracciones simple teniendo en cuenta la tabla de transformadas:

$$\frac{2-z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2} = a\,\frac{1}{1-z^{-1}} + b\,\frac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad a = 2\,,\; b = 1$$

Luego $x[n] = 2 + n$ para $n \geqslant 0$

Comprobamos:

```
δ[n_] := If[n ⩽ 0, 1, 0];
x[n_] := 2 x[n - 1] - x[n - 2] + δ[n]
x[-1] = 1; x[-2] = 1;
Table[x[n], {n, 0, 10}]
Table[2 + n, {n, 0, 10}]
```

```
{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}
```

```
{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}
```

Ejemplo 6

$$\begin{cases} x[n] - 2\,x[n-1] + x[n-2] = u[n] \\ x[-1] = 1\,,\ \ x[-2] = 1 \end{cases}$$

$$X_+(z) - 2\left\{ x[-1] + z^{-1} X_+(z) \right\} + \left\{ x[-2] + x[-1]\, z^{-1} + z^{-2} X_+(z) \right\} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$X_+(z)\left\{ 1 - 2\,z^{-1} + z^{-2} \right\} = \frac{1}{1-z^{-1}} + 1 - z^{-1} \quad \Rightarrow \quad X_+(z) = \frac{1+\left(1-z^{-1}\right)^2}{\left(1-z^{-1}\right)^3}$$

Calculamos la transformada que da un polo triple usando la propiedad $n\, x[n] \rightarrow -z\, X_+{}'(z)$

$$a^n\, u[n] \rightarrow \frac{1}{1-a\,z^{-1}} \qquad \text{polo simple}$$

$$n\, a^n\, u[n] \rightarrow \frac{z^{-1}}{\left(1-a\,z^{-1}\right)^2} \qquad \text{polo doble}$$

$$n^2\, a^n\, u[n] \rightarrow \frac{a\,z^{-1}\left(1+a\,z^{-1}\right)}{\left(1-a\,z^{-1}\right)^3} \qquad \text{polo triple}$$

Descomponemos en fracciones simples la $X_+(z)$ pero teniendo en cuenta estas transformadas:

$$X_+(z) = \frac{1+\left(1-z^{-1}\right)^2}{\left(1-z^{-1}\right)^3} = A\,\frac{1}{1-z^{-1}} + B\,\frac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2} + C\,\frac{z^{-1}\left(1+z^{-1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)^3}$$

Encontramos $A = 2\,,\ B = \frac{3}{2}\,,\ C = \frac{1}{2}$ y por lo tanto

$$x[n] = 2 + \frac{3}{2}\,n + \frac{1}{2}\,n^2 \quad \text{para} \quad n \geqslant 0$$

Podemos usar el programa para invertir la transformada.
y tambien para comprobar los primeros terminos.

```
InverseZTransform[(1 + (1 - z^-1)^2)/(1 - z^-1)^3, z, n]
```

$$\frac{1}{2}\left(4 + 3\,n + n^2\right)$$

```
x[n_] := 2 x[n - 1] - x[n - 2] + 1
x[-1] = 1; x[-2] = 1;
Table[x[n], {n, 0, 10}]
Table[2 + 3/2 n + 1/2 n^2, {n, 0, 10}]
```

{2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37, 46, 56, 67}

{2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, 37, 46, 56, 67}

Ejemplo 7

$$\begin{cases} x[n] + \frac{5}{6}\, x[n-1] + \frac{1}{6}\, x[n-2] = u[n] \\ x[-1] = 1\,,\ x[-2] = 1 \end{cases}$$

$$X_+(z) + \frac{5}{6}\left\{ x[-1] + z^{-1} X_+(z) \right\} + \frac{1}{6}\left\{ x[-2] + x[-1]\, z^{-1} + z^{-2} X_+(z) \right\} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$X_+(z)\left\{1 + \frac{5}{6} z^{-1} + \frac{1}{6} z^{-2}\right\} = \frac{1}{1-z^{-1}} - 1 - \frac{1}{6} z^{-1} \quad \Rightarrow \quad X_+(z) = \frac{z^{-1}\left(5+z^{-1}\right)}{6\left(1-z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2} z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{3} z^{-1}\right)}$$

Separando en fracciones simples queda $X_+(z) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1+\frac{1}{2} z^{-1}} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\frac{1}{3} z^{-1}}$ y la antitransformada es

$$x[n] = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \text{para } n \geqslant 0$$

La calculamos con el programa y luego la comprobamos.

```
InverseZTransform[z^-1 (5 + z^-1) / (6 (1 - z^-1) (1 + 5/6 z^-1 + 1/6 z^-2)), z, n]
```

$$2^{-1-n}\left(-2\,(-1)^n + \left(-\frac{2}{3}\right)^n + 2^n\right)$$

```
x[n_] := -5/6 x[n - 1] - 1/6 x[n - 2] + 1
x[-1] = 1; x[-2] = 1;
Table[x[n], {n, 0, 5}]
Table[1/2 - (-1/2)^n + 1/2 (-1/3)^n, {n, 0, 5}]
```

$\left\{0, \frac{5}{6}, \frac{11}{36}, \frac{131}{216}, \frac{575}{1296}, \frac{4115}{7776}\right\}$

$\left\{0, \frac{5}{6}, \frac{11}{36}, \frac{131}{216}, \frac{575}{1296}, \frac{4115}{7776}\right\}$

Ejemplo 8

$$\begin{cases} x[n] + x[n-1] + x[n-2] = \delta[n] \\ x[-1] = 1\,,\ x[-2] = 1 \end{cases}$$

$$X_+(z) + \left\{x[-1] + z^{-1} X_+(z)\right\} + \left\{x[-2] + x[-1]\, z^{-1} + z^{-2} X_+(z)\right\} = 1$$

$$X_+(z)\left\{1 + z^{-1} + z^{-2}\right\} = 1 - z^{-1} \quad \Rightarrow \quad X_+(z) = \frac{-1-z^{-1}}{1+z^{-1}+z^{-2}}$$

Como el denominador tiene ceros complejos conjugados de modulo 1 recurrimos a la tabla

$$\cos n\theta\ u[n] \ \rightarrow\ \frac{1-\cos\theta\, z^{-1}}{1-2\cos\theta\, z^{-1}+z^{-2}} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} n\theta\ u[n] \ \rightarrow\ \frac{\operatorname{sen} n\theta\ z^{-1}}{1-2\cos\theta\, z^{-1}+z^{-2}}$$

En nuestro caso $\cos\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Separamos la $X_+(z)$ de acuerdo a esta tabla:

$$X_+(z) = \frac{-1-z^{-1}}{1+z^{-1}+z^{-2}} = A\,\frac{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{1+z^{-1}+z^{-2}} + B\,\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\,z^{-1}}{1+z^{-1}+z^{-2}} \quad \Rightarrow \quad A = -1\ ,\ \ B = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Luego

$$x[n] = -\cos\frac{2n\pi}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\frac{2n\pi}{3} \quad \text{para} \quad n \geqslant 0$$

es periodica de periodo 3 : $x[n+3] = x[n]$

```
InverseZTransform[(-1 - z^-1)/(1 + z^-1 + z^-2), z, n]
```

$$-\frac{(-1)^{\frac{2(1+n)}{3}}\left(-1+(-1)^{2n/3}\right)}{1+(-1)^{1/3}} - \text{ChebyshevU}\left[n, -\frac{1}{2}\right]$$

```
δ[n_] := If[n ≤ 0, 1, 0]
x[n_] := - x[n - 1] - x[n - 2] + δ[n]
x[-1] = 1; x[-2] = 1;
Table[x[n], {n, 0, 10}]
Table[-Cos[2 n π/3] - 1/√3 Sin[2 n π/3], {n, 0, 10}]
```

{-1, 0, 1, -1, 0, 1, -1, 0, 1, -1, 0}

{-1, 0, 1, -1, 0, 1, -1, 0, 1, -1, 0}

Ejemplo 9

$$\begin{cases} x[n] + x[n-1] + \frac{1}{4}\,x[n-2] = u[n] \\ x[-1] = 0\,,\;\; x[-2] = 1 \end{cases}$$

$$X_+(z) \;+\; \left\{x[-1] + z^{-1}\,X_+(z)\right\} + \frac{1}{4}\left\{x[-2] \;+\; x[-1]\,z^{-1} + z^{-2}\,X_+(z)\right\} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$X_+(z)\left\{1 + \;z^{-1} + \frac{1}{4}\,z^{-2}\right\} = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{4}$$

$$X_+(z) = \frac{3+z^{-1}}{4\left(1-z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\,z^{-1}\right)^2} = \frac{1}{4}\left\{A\,\frac{1}{1-z^{-1}} + B\,\frac{-\frac{1}{2}\,z^{-1}}{\left(1+\frac{1}{2}\,z^{-1}\right)^2} + C\,\frac{1}{1+\frac{1}{2}\,z^{-1}}\right\}$$

Resolviendo obtenemos $A = \frac{16}{9}$, $B = \frac{1}{3}$, $C = \frac{11}{9}$ y por lo tanto:

$$x[n] = \frac{4}{9} + \frac{n}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{11}{36}\left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{para} \quad n \geqslant 0$$

Se ve que tiene limite: $\lim_{n\to\infty} x[n] = \frac{4}{9}$. Esto se aprecia en el grafico mas abajo.

```
InverseZTransform[(3 + z^-1)/(4 (1 - z^-1) (1 + 1/2 z^-1)^2), z, n]
```

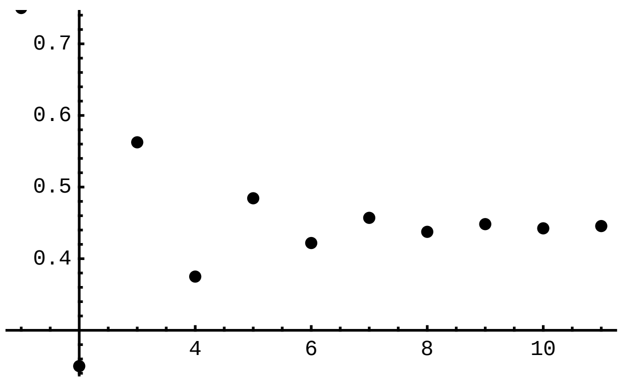
$$\frac{1}{36}\left(16 + 11\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^n n\right)$$

```
x[n_] := - x[n - 1] - 1/4 x[n - 2] + 1
x[-1] = 0; x[-2] = 1;
Table[x[n], {n, 0, 10}]
Table[4/9 + n/12 (-1/2)^n + 11/36 (-1/2)^n, {n, 0, 10}]
```

$$\left\{\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{9}{16}, \frac{3}{8}, \frac{31}{64}, \frac{27}{64}, \frac{117}{256}, \frac{7}{16}, \frac{459}{1024}, \frac{453}{1024}, \frac{1825}{4096}\right\}$$

$$\left\{\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{9}{16}, \frac{3}{8}, \frac{31}{64}, \frac{27}{64}, \frac{117}{256}, \frac{7}{16}, \frac{459}{1024}, \frac{453}{1024}, \frac{1825}{4096}\right\}$$

```
ListPlot[%3, PlotStyle → PointSize[0.02]];
```



Ejercicio

Resolver usando transformada Z_+ :

a) $x[n] + 3\,x[n-1] = 8\,u[n]$ con $x[-1] = 1$
b) $2\,x[n] + x[n-1] = \frac{1}{4^n}\,u[n]$ con $x[-1] = 2$
c) $x[n] - \frac{1}{2}\,x[n-1] = u[n] - \frac{1}{2}\,u[n]$ con $x[-1] = 1$
d) $2\,x[n] - 2\,x[n-1] + x[n-2] = u[n]$ con $x[-1] = x[-2] = 0$
e) $x[n] - 2\,x[n-1] + x[n-2] = u[n]$ con $x[-1] = 1\,,\; x[-2] = 0$ Rta: $\frac{1}{2}\left(6 + 5\,n + n^2\right)$
f) $x[n] + x[n-1] - 2\,x[n-2] = \delta[n-1]$ con $x[-1] = 0\,,\; x[-2] = -1$ Rta: $\frac{1}{3}\,(-1 - 5\,(-2)^n)$
g) $x[n] - 2\,x[n-1] + x[n-2] = (-1)^n\,u[n-1]$ con $x[-1] = 0\,,\; x[-2] = 1$ Rta: $-\frac{1}{2}\,n - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\,(-1)^n$

Ejercicio

a) Sea $x[n]$ de período p.
Demostrar que su transformada Z_+ es $X_+(z) = \frac{1}{1-z^{-p}}\,\sum_{k=0}^{p-1} x[k]\; z^{-k}$

b) Hallar la transfomada Z_+ de $(-1)^n$ por la fórmula anterior o por la tabla y comprobar que son iguales.
Idem para $\operatorname{sen}\left(n\,\frac{\pi}{2}\right)$

c) Hallar la transfomada Z_+ de $x = \{\,..,\, 1_0,\, -1,\, -1,\, ...\}$ de período 3 .
Antitransformando obtener la expresión $x[n] = -\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\cos\left(\frac{2\pi}{3}\,n\right)$ válida para todo n

d) Hallar la transfomada Z_+ de $x = \{\,..,\, 1_0,\, -2,\, 1,\, ...\}$ de período 3 .
Antitransformando obtener la expresión $x[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\,n\right) - \frac{3}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\,n\right)$ válida para todo n

Ejercicio

Sea $a_0\, x[n] + a_1\, x[n-1] + a_2\, x[n-2] = d[n]$ una ecuación lineal de orden 2.
Si $d[n]$ tiene período p buscamos la solución de período p .
Mediante la transformada Z_+ se obtiene

$$X_+(z) = \frac{\left(1-z^{-p}\right)\left(-a_1\, x[-1]-a_2\, x[-1]\, z^{-1}-a_2\, x[-1]\right) + \sum_{k=0}^{p-1} d[k]\, z^{-k}}{\left(1-z^{-p}\right)\left(a_0 + a_1\, z^{-1} + a_2\, z^{-2}\right)}$$

Para que sea periódica de período p el numerador debe anularse en las raíces características, con su multiplicidad. Así se obtienen los valores $x[-2]$, $x[-1]$ que determinan la solución periódica.

Ejercicio

Sea $x[n] - \frac{1}{2}\, x[n-1] = 1 + (-1)^n$
Obtener por el método del ejercicio anterior la solución de período 2.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN DIFERENCIAS

Discretización de un sistema de ecuaciones diferenciales

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con una entrada y una salida

$$\begin{cases} X' = A\, X + B_0\, f(t) \\ y = C\, X + D\, f(t) \end{cases}$$

y la condición inicial $X(0) = X_0$.

Elegimos un paso $T > 0$ y muestreamos tanto el vector incógnita como la entrada y la salida:

$$X(k\,T) = X[k] \qquad f(k\,T) = d[k] \qquad y(k\,T) = y[k]$$

El sistema queda aproximado por el sistema discreto

$$\begin{cases} \frac{1}{T}\,(X[k+1] - X[k]) = A\, X[k] + B\, d[k] \\ y[k] = C\, X[k] + D\, d[k] \end{cases}$$

con la condición inicial $X[0] = X_0$.

Pasando términos se obtiene un sistema de primer orden en diferencias lineal

$$\begin{cases} X[k+1] = A_0\, X[k] + B_0\, d[k] \\ y[k] = C\, X[k] + D\, d[k] \end{cases}$$

con las matrices $A_0 = I + T\,A$, $B_0 = T\,B$ y la condición inicial $X[0] = X_0$.

Ejemplo 1

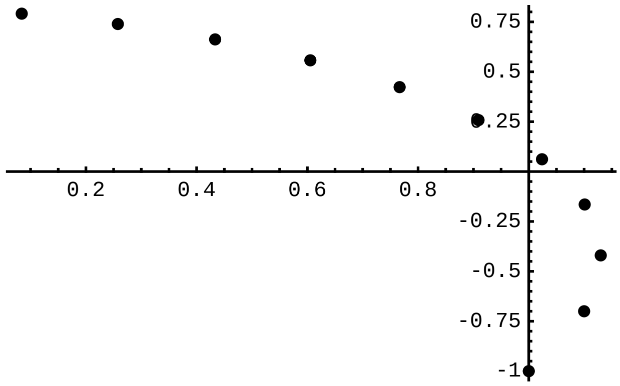
Discretizamos el sistema $X\,' = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$, $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Usamos el paso $T = 0.1$ para calcular aproximadamente $X(1)$.
Graficamos la sucesión aproximante..
Como ejercicio calcular la solución exacta y comparar las gráficas.

```
t = 0.1; A0 = (1 0; 0 1) + t (-1 -2; 1 -1) ; B0 = {0, t}; x[0] = {1, -1};
x[n_] := A0 .x[n - 1] + {0, t}
Table[x[k], {k, 0, 10}]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1.1 & -0.7 \\ 1.13 & -0.42 \\ 1.101 & -0.165 \\ 1.0239 & 0.0616 \\ 0.90919 & 0.25783 \\ 0.766705 & 0.422966 \\ 0.605441 & 0.55734 \\ 0.433429 & 0.66215 \\ 0.257656 & 0.739278 \\ 0.084035 & 0.791116 \end{pmatrix}$$

```
ListPlot[%, PlotStyle → PointSize[0.02]];
```



Ejemplo 2

Sabemos que una ecuación diferencial de orden n se puede expresar como un sistema de primer orden usando variables de estado. A su vez este sistema se puede discretizar.

Por ejemplo $x'' + x' + x = u(t)$ con $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

Tomamos $x_1 = x$, $x_2 = x'$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t) \qquad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

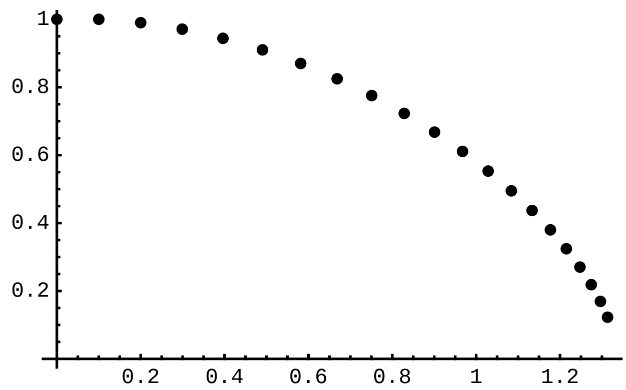
Eligiendo el paso T se tiene el sistema en diferencias lineal

$$X[n] = \begin{pmatrix} 1 & T \\ -T & 1-T \end{pmatrix} X[n-1] + \begin{pmatrix} 0 \\ T \end{pmatrix} \qquad X[0] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

```
t = 0.1; a0 = (1 0
               0 1) + t ( 0  1
                         -1 -1) ; b0 = {0, t}; x[0] = {0, 1};
x[n_] := a0 .x[n - 1] + b0
s = Table[x[k], {k, 0, 20}]
```

```
{{0, 1}, {0.1, 1.}, {0.2, 0.99}, {0.299, 0.971}, {0.3961, 0.944}, {0.4905, 0.90999},
 {0.581499, 0.869941}, {0.668493, 0.824797}, {0.750973, 0.775468},
 {0.82852, 0.722824}, {0.900802, 0.66769}, {0.967571, 0.61084}, {1.02865, 0.552999},
 {1.08395, 0.494834}, {1.13344, 0.436955}, {1.17713, 0.379916}, {1.21513, 0.324211},
 {1.24755, 0.270277}, {1.27457, 0.218495}, {1.29642, 0.169188}, {1.31334, 0.122627}}
```

```
ListPlot[s, PlotStyle → PointSize[0.02]];
```



SISTEMAS DE ECUACIONES EN DIFERENCIAS LINEALES

Un sistema lineal de n ecuaciones en diferencias con una entrada es de la forma

$$X[k] = A\,X[k-1] + B\,d[k]$$

Ejemplo

Sea una ecuación lineal en diferencias de orden 2

$$a_2\,x[n] + a_1\,x[n-1] + a_0\,x[n-2] = d[n] \quad \text{con} \quad a_0 \neq 0\,,\ a_2 \neq 0$$

Se puede escribir como un sistema de orden 2 poniendo $X[n] = \begin{pmatrix} x[n-1] \\ x[n] \end{pmatrix}$

$$X[n] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_2}{a_0} & -\frac{a_1}{a_0} \end{pmatrix} X[n-1] + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{a_0} \end{pmatrix} d[n]$$

La matriz es invertible y su polinomio característico coincide con el de la ecuación.
Lo mismo vale para una ecuación de orden s .

Consideremos un sistema homogéneo con una condición inicial:

$$\begin{cases} X[k] = A\,X[k-1] \\ X[0] = X_0 \end{cases}$$

La solución se puede calcular en forma iterativa, hacia adelante, comenzando con el dato inicial X_0:

$$X[k] = A\,X[k-1] = A^2\,X[k-2] =. ... = A^k\,X[0]$$

Si la matriz es invertible, se pueden calcular los valores hacia atrás:

$$X[-1] = A^{-1}\,X[0]\,,\ X[-2] = A^{-1}\,X[-1]\ = A^{-2}\,X[0],\ \ ... ..,\ X[-k] = A^{-k}\,X[0]\,,\ \ ...$$

Teorema

Las soluciones $\{X[k] : k \geqslant 0\}$ de un sistema homogéneo $X[k] = A\,X[k-1]$ de orden n forman un espacio vectorial de dimensión n.

Demostración

Sean $E_1,\ ...,\ E_n$ los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Para cada E_i generamos la solución X_i dada por $X_i[k] = A^k\,E_{i\ :}\ k = 0,\ 1,$ ....que verifican $X_i[0] = A^0\,E_i = E_i$.

Estas son linealmente independientes pues si $\sum_{i=1}^n c_i\,X_i[k] = 0$ es decir, la solución nula, entonces ponemos $k = 0$ y queda $\sum_{i=1}^n c_i\,X_i[0] = \sum_{i=1}^n c_i\,E_i = 0 \Rightarrow\ c_1 =.. = c_n = 0$.

Además dada una solución $X[k]\,,\ k \geqslant 0$, sea $X[0] = \begin{pmatrix} c_1 \\ .. \\ c_n \end{pmatrix}$. Es claro que $X\ = \sum_{i=1}^n c_i\,X_i$. Luego los X_i generan.

q.e.d.

Si la matriz A es invertible se pueden considerar las soluciones $\{X[k] : -\infty < k < \infty\}$.

Si la matriz A se diagonaliza, se puede hallar una base de la siguiente manera.

Sea $\{X_1,\ ...,\ X_n\}$ una base de autovectores con autovalores $r_1,\ ...,\ r_m$ no nulos y $r_{m+1} =.. = r_n = 0$.

Las soluciones de la ecuación homogénea son

$$X[k] = c_1\,X_1\,{r_1}^k + ... + c_m\,X_m\,{r_m}^k + (c_{m+1}\,X_{m+1}\ + ...+c_n\,X_n)\,\delta[k]$$

Si no se diagonaliza se puede usar, de ser posible, la forma de Jordan.

Ejemplo 1

$$X[k] = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} X[k-1]$$

La matriz tiene autovalores $\lambda = -1\ ,\ 2$ y autovectores asociados $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Luego las soluciones son

$$X[k] = c_1\,(-1)^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2\,2^k \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2

$$X[k] = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} X[k-1]$$

La matriz se diagonaliza con $\lambda_1 = -3\,,\ X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\ ;\ \lambda_2 = \lambda_3 = 0\,,\ X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\ ,\ X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Las soluciones son

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} (-3)^k + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \delta[k] + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \delta[k]$$

Ejemplo 3

Para un bloque de Jordan de orden 2 $X[k] = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} X[k-1]$ con $\alpha \neq 0$ comprobar que las soluciones son

$$X[k] = c_1 \begin{pmatrix} k\,\alpha^{k-1} \\ \alpha^k \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \alpha^k \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $\alpha = 0$ el sistema es $X[k] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X[k-1]$ y una base de soluciones es

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \delta[k] \qquad \text{y} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \delta[k] + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \delta[k-1]$$

Ejemplo 4

Para un bloque de Jordan de orden 3 $X[k] = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} X[k-1]$ con $\alpha \neq 0$

las soluciones son

$$X[k] = c_1 \begin{pmatrix} \alpha^k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} k\,\alpha^{k-1} \\ \alpha^k \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \left[\frac{1}{2}\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 - k\right]\alpha^{k-2} \\ k\,\alpha^{k-1} \\ \alpha^k \end{pmatrix}$$

Comprobamos que son soluciones con el programa.

```
x1[k_] := (1/2 (k + 1/2)^2 - k) α^(k-2)
x2[k_] := k α^(k-1)
x3[k_] := α^k
{x1[k], x2[k], x3[k]} - {{α, 1, 0}, {0, α, 1}, {0, 0, α}}.{x1[k - 1], x2[k - 1], x3[k - 1]} // Simplify
```

```
{0, 0, 0}
```

Si $\alpha = 0$ el sistema es $X[k] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X[k-1]$. Una base se halla como en el ejemplo anterior.

Ejemplo 5

$$X[k] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X[k-1]$$

La matriz tiene al número 1 como único autovalor con multiplicidad geométrica 2 .

Una base de Jordan para la matriz es $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y el sistema en esta base es

$$Y[k] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y[k-1] \quad \text{con el cambio de coordenadas} \quad X[k] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} Y[k]$$

Como en los ejemplos anteriores tenemos las soluciones

$$Y[k] = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 - k \\ k \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y de ellas obtenemos las 4 soluciones linealmente independientes $X[k]$.

Ejemplo 6

$$X[k] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X[k-1]$$

Los autovalores son $\lambda = 1, 1, 0$. Llevamos la matriz a la forma de Jordan.

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B^{-1} A B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = J$

Con el cambio de variables $X[k] = B\,Y[k]$ se tiene $Y[k] = J\,Y[k-1]$ y una base de soluciones es

$$Y_1[k] = J^k E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ constante}; \quad Y_2[k] = J^k E_2 = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = k\,E_1 + E_2 \quad ; \quad Y_3[k] = J^k E_3 = E_3\,\delta[k]$$

$$Y[k] = c_1 \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \delta[k] \quad \Rightarrow \quad X[k] = c_1 \begin{pmatrix} -k+1 \\ 1 \\ k \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \delta[k]$$

Ejercicio

Resolver los sistemas $X[k] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} X[k-1]$ y $X[k] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} X[k-1]$

ESTABILIDAD DE SISTEMAS

Consideremos un sistema en diferencias lineal

$$\begin{cases} X[k] = A\,X[k-1] + B\,v[k] \\ X[0] = X_0 \end{cases}$$

Se dice internamente estable si cada solución del homogéneo $X[k] = A\,X[k-1]$ cumple $\lim_{k\to+\infty} X[k] = 0$.

Teorema

Un sistema en diferencias lineal es internamente estable si y sólo si sus raíces características tienen valor absoluto < 1.

Demostración

Si $M^{-1} A\,M = J$ es la matriz de Jordan en la diagonal figuran las raíces características de A.

Sea $X[k] = M\,Y[k] \;\Rightarrow\; M\,Y[k] = A\,M\,Y[k-1] \;\Rightarrow\; Y[k] = M^{-1} A\,M\,Y[k-1] = J\,Y[k-1]$.

⇒) Si alguna raíz característica r tiene $|r| \geqslant 1$ y K es autovector asociado $A\,K = r\,K$ entonces la solución $X[k] = K\,r^k$ no tiende a cero y la ecuación no es internamente estable.

⇐) Supongamos que las raíces características tienen valor absoluto menor que 1.

Se tiene $Y[k] = J\,Y[k-1] = J^2\,Y[k-2] =. ... = J^k\,Y[0]$.

Se ha probado en la unidad 1 que si las raíces tienen valor absoluto menor que 1 entonces $\lim_{k\to+\infty} J^k = 0$ y por lo tanto $\lim_{k\to\infty} Y[k] = 0$. Luego $\lim_{k\to\infty} X[k] = \lim_{k\to\infty} J\,Y[k] = 0$.

q.e.d.

Ejemplo 1

Sea el sistema homogéneo $X[k] = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X[k-1]$

Los autovalores de la matriz son $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}$ y por lo tanto es internamente estable.

Ejemplo 2

Sea el sistema homogéneo $X[k] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X[k-1]$

Los autovalores de la matriz son $1, 1, 0$ y por lo tanto no es internamente estable.

Ejemplo 3

Sea el sistema homogéneo $X[k] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} X[k-1]$

Los autovalores de la matriz son $\frac{1+i}{2}, \frac{1-i}{2}, -\frac{1}{2}$ y por lo tanto es internamente estable.

Teorema

Si un sistema en diferencias lineal $X[k] = A\,x[k-1] + B\,d[k]$ es internamente estable entonces para cada entrada acotada $d[k]$ todas las posibles salidas son acotadas.

Demostración

Sea h la respuesta causal a la δ : $h[0] = A\,h[-1] + B\,\delta[0] = B$ y entonces $h[k] = A^k\,B$

Para cada entrada acotada $d[k]$ la salida, partiendo del reposo, es $h * d$ y se ve que es acotada pues h lo es.

Además todas las salidas son suma de esa salida particular más una del homogéneo. Por ello todas son acotadas.

q.e.d.

Ejercicio

Sea el sistema homogéneo $X[k] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \\ -1 & \frac{3}{5} \end{pmatrix} X[k-1]$

a) Estudiar la estabilidad interna.

b) Representar gráficamente $X[k]$ si $X[0] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) Calcular $\lim_{k\to\infty} X[k]$ para cada posición inicial $X[0]$

Ejercicio

Averiguar para qué valores de a el sistema homogéneo $X[k] = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} X[k-1]$ es estable.

Rta. $0 < a < \frac{1}{2}$.

Ejercicio

Sea el sistema homogéneo $X[k] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} X[k-1]$

a) Estudiar la estabilidad interna.

b) Representar gráficamente $X[k]$ si $X[0] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) Calcular $\lim_{k\to\infty} X[k]$ para cada posición inicial $X[0]$

Ejercicio

Sea el sistema $X[k] = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} X[k-1] + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} d[k]$

a) Calcular la respuesta causal a la $\delta[k]$

b) Representar gráficamente $X[k]$ si $X[0] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $d[k] = u[k]$

Ejercicio

Sea el sistema homogéneo $X[k] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} X[k-1]$

a) Calcular una base de soluciones

b) Representar gráficamente $X[k]$ para la condición inicial $X[0] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio

Sea el sistema homogéneo $X[n] = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 1 \\ 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix} X[n-1]$

a) Calcular una base de soluciones

b) Representar gráficamente $X[k]$ para la condición inicial $X[0] = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio

Sea el sistema homogéneo $X[k] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} X[k-1]$

Calcular una base de soluciones y encontrar la que verifica $X[0] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ejercicio

Sea el sistema $X[k] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} X[k-1] + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} d[k]$

a) Calcular una base de soluciones del sistema homogéneo.

b) Calcular la solución general para $d[k] = u[k]$.

c) Calcular la respuesta causal a la δ .

Ejercicio

Calcular una base de soluciones de $X[k] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} X[k-1]$ y encontrar la que verifica $X[0] = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

CONTROLABILIDAD

Sea el sistema en diferencias lineal de orden n con una entrada:

$$X[k] = A\,X[k-1] + B\,d[k]$$

Se dice controlable si dado un estado inicial X_i y un estado final X_f se puede pasar, mediante una entrada adecuada y en tiempo finito, desde X_i a X_f .

Supongamos para claridad de ideas que el sistema es de orden 3.
Para una entrada $d[k] = d_1\,\delta[k-1] + d_2\,\delta[k-2] + d_3\,\delta[k-3]$, partiendo de $X[0] = X_i$, las salidas sucesivas son

$$\begin{aligned} X[1] &= A\,X[0] + B\,d_1 = A\,X_i + B\,d_1 \\ X[2] &= A\,X[1] + B\,d_2 = A(A\,X_i + B\,d_1) + B\,d_2 = A^2\,X_i + A\,B\,d_1 + B\,d_2 \\ X[3] &= A^3\,X_i + A^2\,B\,d_1 + A\,B\,d_2 + B\,d_3 \end{aligned}$$

Si la matriz $(B,\ A\,B,\ A^2\,B)$ es invertible las columnas forman base de $\mathbb{R}^3$. Entonces dado X_f existe d tal que

$$X_f - A^3\,X_i = A^2\,B\,d_1 + A\,B\,d_2 + B\,d_3$$

y por lo tanto es controlable pues en 3 pasos se va de X_i a X_f con la entrada d .

Recíprocamente, supongamos que es controlable.
Para $X_i = 0$ y X_f arbitrario en $\mathbb{R}^3$ existen d y s tal que $X_f = A^s\,B\,d_s + A^{s-1}\,B\,d_{s-1} + \ldots. + B\,d_0$.
Según el teorema de Cayley-Hamilton

$$\left[B,\ A\,B,\ A^2\,B,\ A^3\,B,\ \ldots..\right] = \left[B,\ A\,B,\ A^2\,B\right] \subset \mathbb{R}^3$$

Luego cada X_f pertenece a $\left[B,\ A\,B,\ A^2\,B\right] = \mathbb{R}^3$ y entonces la matriz $(B,\ A\,B,\ A^2\,B)$ es invertible.
Hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema
El sistema lineal de orden n $X[k] = A\,X[k-1] + B\,d[k]$ es controlable si y sólo si la matriz $(B,\ A\,B,\ \ldots,\ A^{n-1}\,B)$ es invertible.

Ejemplo 1

$$X[k] = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X[k-1] + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} d[k]$$

Este sistema no es controlable pues la matriz $(B,\ A\,B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ no es invertible.

Ejemplo 2

$$X[k] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} X[k-1] + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} d[k]$$

Este sistema es controlable pues la matriz $(B,\ A\,B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ es invertible.

OBSERVABILIDAD

El sistema lineal con una entrada y una salida

$$\begin{cases} X[k] = A\,X[k-1] + B\,d[k] \\ y[k] = C\,X[k] + D\,d[k] \end{cases}$$

se dice observable si existe un $r > 0$ tal que conocidas la entrada $d[k]$ y la salida $y[k]$ para $0 \leqslant k \leqslant r$ se puede determinar el estado inicial $X[0]$ y por lo tanto los estados sucesivos $X[k]$, $k \geqslant 1$.
Se tiene

$$C\,X[0] = y[0] - D\,d[0]$$
$$C\,X[1] = y[1] - D\,d[1] = C\,(A\,X[0] + C\,B\,d[0]) \quad \Rightarrow \quad C\,A\,X[0] = y[1] - D\,d[1] - C\,B\,d[0]$$

y así siguiendo se ve que se conocen los números $C\,A^k\,X[0]$ para $0 \leqslant k \leqslant r$.

Por Cayley-Hamilton, si el sistema es de orden n :

$$[C,\ C\,A,\ C\,A^2,\ \ldots\ldots] = [C,\ C\,A,\ C\,A^2,\ \ldots\ldots,\ C\,A^{n-1}] \subset \mathbb{R}^n$$

Si la matriz $(C,\ C\,A,\ C\,A^2,\ \ldots\ldots,\ C\,A^{n-1})$ es invertible entonces tomando $r = n-1$, con la matriz inversa se puede conocer
$X[0]$ y el sistema es observable.

Recíprocamente, si es observable, el sistema lineal $\left(C,\ C\,A,\ C\,A^2,\ \ldots\ldots,\ C\,A^{n-1}\right) X[0] = \begin{pmatrix} e_1 \\ .. \\ e_n \end{pmatrix}$, que siempre es compatible, tiene solución única y por ello la matriz $\left(C,\ C\,A,\ C\,A^2,\ \ldots\ldots,\ C\,A^{n-1}\right)$ es invertible.
Hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema
El sistema lineal con una entrada y una salida $\begin{cases} X[k] = A\,X[k-1] + B\,d[k] \\ y[k] = C\,X[k] + D\,d[k] \end{cases}$ es observable si y sólo si la matriz $\left(C,\ C\,A,\ C\,A^2,\ \ldots\ldots,\ C\,A^{n-1}\right)$ es invertible.

APÉNDICE

Teorema de Rouché
Sean $f(z)$ y $g(z)$ dos funciones analíticas en el disco unidad cerrado $|z| \leqslant 1$ y tales que

$$|f(z) - g(z)| < |f(z)| \quad \text{en} \quad |z| = 1$$

Entonces tienen el mismo número de ceros en el disco abierto $|z| < 1$.
Demostración
Observemos que por la desigualdad las funciones no pueden tener ceros en $|z| = 1$.
Podemos escribir la desigualdad así

$$\left|1 - \frac{g(e^{i\,t})}{f(e^{i\,t})}\right| < 1 \quad \text{para} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\,\pi$$

Luego los valores del cociente $\frac{g(e^{i\,t})}{f(e^{i\,t})}$ están en el disco de centro 1 y radio 1 y allí está definida la rama principal del logaritmo. Se tiene entonces la función $h(t) = \mathrm{Ln}\left(\frac{g(e^{i\,t})}{f(e^{i\,t})}\right)$
con derivada

$$h'(t) = \frac{1}{\frac{g(e^{i\,t})}{f(e^{i\,t})}} \left(\frac{g(e^{i\,t})}{f(e^{i\,t})}\right)' \qquad \text{y} \qquad h(0) = h(2\,\pi)$$

Luego

$$0 = \int_0^{2\pi} h'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{g'(e^{i\,t})\,i\,e^{i\,t}}{g(e^{i\,t})}\,dt - \int_0^{2\pi} \frac{f'(e^{i\,t})\,i\,e^{i\,t}}{f(e^{i\,t})}\,dt = \int_{|z|=1} \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz - \int_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

Pero

$$\int_{|z|=1} \frac{g'(z)}{g(z)}\, dz = 2\pi i \sum \text{res}\left(\frac{g'}{g}\right) = 2\pi i \;(\text{cantidad de ceros de } g \text{ en } |z| < 1)$$

$$\int_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 2\pi i \sum \text{res}\left(\frac{g'}{g}\right) = 2\pi i \;(\text{cantidad de ceros de } f \text{ en } |z| < 1)$$

Luego tienen la misma cantidad de ceros en el disco unidad.

q.e.d.

EJERCICIOS

1. Dibujar las siguientes funciones discretas:
   a) $u[n] - u[n-3]$
   b) $2\,u[n] - u[n-1]$
   c) $3\,\delta[n-2] + 2\,\delta[n-1] - 2\,u[n-1]$
   d) $n\,u[n] + (-1)^n\,u[n-1]$
   e) $2^{-n} \cos \pi n$
   f) $u[n] - u[-n]$

2. Usando combinaciones lineales de $\delta[n]$ y $u[n]$ y sus trasladadas escribir las siguientes:
   a) $f[n] = 2$ si $-3 \leq n \leq 5$, -1 si $7 < n \leq 10$, 0 en los otros n.
   b) $g[n] = 1$ si n es par, -1 si n es impar
   c) $\text{sg}(n) = 1$ si $n > 0$, $\text{sg}[0] = 0$, $\text{sg}[n] = -1$ si $n < 0$ "función signo"
   d) $\text{sat}_N[n] = n$ si $-N \leqslant n \leqslant N$, N si $n \geqslant N$, $-N$ si $n \leqslant -N$

3. Considere las siguientes ecuaciones en diferencias de primer orden con condiciones iniciales:
   a) $x[n] + \frac{1}{2}\,x[n-1] = d[n]$, $x[-1] = 0$
   b) $2\,x[n] - x[n-1] = d[n-1]$, $x[0] = 1$
   Tomar sucesivamente $d[n] = 0$, $\delta[n]$, $u[n]$
   Primero resolverlas iterativamente para $0 \leq n \leq 20$ y luego hallar la solución general. Graficarlas.

4. Resolver las siguientes ecuaciones homogéneas de segundo orden con condiciones iniciales.
   a) $x[n] + 2\,x[n-1] + \frac{1}{2}\,x[n-2] = 0$, $x[-1] = 0$, $x[-2] = 1$
   b) $x[n] + 2\,x[n-1] + 5\,x[n-2] = 0$, $x[-1] = 1$, $x[-2] = 0$
   c) $x[n] + 6\,x[n-1] + 9\,x[n-2] = 0$, $x[-1] = 1$, $x[-2] = 0$

5. Encontrar todas las soluciones de las ecuaciones en diferencias
   a) $x[n] - \frac{1}{3}\,x[n-1] = \delta[n]$
   b) $x[n] + x[n-1] = \delta[n-1]$
   c) $x[n] + 2\,x[n-1] + x[n-2] = \delta[n]$

6. a) ¿ Cuándo el polinomio $z^2 + k\,z + \frac{1}{2}$ tiene sus raíces en $|z| < 1$?
   b) ¿ Cuándo $z^2 + z + k$ tiene sus raíces en $|z| < 1$?

7. Averiguar si las ecuaciones en diferencias son internamente estables.
   a) $x[n] - \frac{5}{6}\,x[n-1] + \frac{1}{6}\,x[n-2] = 0$
   b) $x[n] - \frac{11}{6}\,x[n-1] + \frac{2}{3}\,x[n-2] = 0$
   c) $x[n] - \frac{5}{4}\,x[n-1] - \frac{1}{4}\,x[n-2] + \frac{5}{16}\,x[n-3] = 0$

8. Realizar las convoluciones:

a) $u[n] * u[n]$ b) $u[n] * u[n-2]$ c) $u[n] * \prod_{[-1,3]}$ d) $u * r$

e) $u[n] * \alpha^n u[n]$ f) $u[n] * 2^n (u[n-4] - u[n])$

g) $\prod_{[2,5]} * \left(r \prod_{[1,3]}\right)$ h) $x * r$ con $x = \sum_{k=1}^{3} k\,\delta[n-k]$

7. Demostrar las propiedades de la convolución:
asociativa, conmutativa, distributiva y que la δ es la unidad.

8. a) Una sucesión es pares $v[-n] = v[n]$ e impar si $v[-n] = -v[n]$
Probar que la convolución de pares es par, que la convolución de impares es par, y que la convolución de una par y una impar es impar.
b) Si dos sucesiones son causales la convolución existe y es causal y está dada por una suma finita:
$$(x * y)[n] = \sum_{k=0}^{n} x[k]\, y[n-k]$$
c) Si x e y son finitas probar que la convolución también es finita : $x,\ y \in \mathfrak{S}_f \Rightarrow x * y \in \mathfrak{S}_f$
d) Si x es finita e y es causal probar que $x * y \in \mathfrak{S}_f + \mathfrak{S}_+$

9. a) Probar que $x[n] * \delta[n-s] = x[n-s]$
b) Calcular $\{2, -1_0, 1, 0, 2\} * \{2, -1, 0_0\}$ y graficar.

10. Sean el problema contínuo
$$x' + 0.4\,x = u[t],\ x(0) = 1$$
Discretizarlo por el método de Euler con un paso $h > 0$.
Luego para $h = 0.2$ hallar el valor aproximado en $t = 2$.
Comparar con el valor obtenido usando el paso mitad $h = 0.1$.
Graficar las soluciones obtenidas y comparar los resultados obtenidos con los resultados exactos.

11. Calcular la transformada Z , su región de convergencia y la ubicación de sus ceros y polos, de las siguientes sucesiones:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$ b) $2\,\delta[n] + u[-n]$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) u[n]$
d) $\delta[n+2]$ e) $3\,\delta[n-2] - \delta[n+1]$ f) $(-1)^n u[4-n]$
g) $\operatorname{sen}(\omega n)\, u[n]$ h) $\cos(\omega n)\, u[n]$ (usar $e^{i\omega n}$)

12. Si la transformada Z de $x[n]$ es la función $X(z)$ con RC: $r < |z| < R$, probar que la transformada Z de

a) $x[n-1]$ es $z^{-1} X(z)$ en la RC......
b) $2^n x[n]$ es $X\left(\frac{z}{2}\right)$ en la RC:......
c) $2\,x[n+2] - x[n-1]$ es $\left(2 z^2 - z^{-1}\right) X(z)$ con la misma región de convergencia.
d) ¿ Cuál es la transformada Z de $x[2-n]$?

13. Sea $X(z)$ la transformada Z de $x[n]$.
¿ De quién es la transformada $-z\,X'(z)$, $X'(z)$, $X(z)^2$?

14. a) Comprobar que la transformada Z de $u[n] * n\,u[n]$ es el producto de las transformadas.
b) Idem para $x[n] * y[n]$ donde $x[n] = 2\,\delta[n] + \delta[n-1] - \delta[-2]$ e $y[n] = u[n] - u[n-5]$.
c) Calcular $\prod_{[2,4]} * \left(r \prod_{[1,3]}\right)$ mediante la transformada Z donde r es la rampa.

15. a) Si $x\ [n]$ es causal, es decir, $x[n] = 0$ para $n < 0$, probar que su transformada Z es finita en ∞ Más aún $\lim_{z\to\infty} X(z) = x[0]$.
b) Comprobarlo con $x[n] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leqslant 0 \\ n^{-1} & \text{si } n > 0 \end{cases}$ y con $\delta[n-1]$

16. Calcular las transformadas Z inversas de las siguientes:

a) $\frac{1}{1-2\,z^{-1}}$, $|z| < 2$ b) $\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}$, $|z| > 1$ c) $\frac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-2\,z^{-1}\right)}$, $|z| > 2$

d) $\frac{z+2}{z^2(z-2)}$, $|z| > 2$ e) $\frac{z^2+z+2}{(z-1)\left(z^2-z+1\right)}$, $|z| > r$ f) $\frac{z^2}{(z-1)^2\,(z+2)}$, $|z| > 2$

17. Resolver las siguientes ecuaciones y comprobarlas.

a) $x * r = \delta$ b) $x * 2^{-n}\,u[n] = \delta$ c) $x = 2^{-n}\,u[n] - x * u$ d) $x = r - x * u$

18. Hallar la respuesta causal al impulso unitario de las siguientes ecuaciones usando la transformada Z
a) $x[n] - 2\,x[n-1] = d[n] - 0.5\,d[n-1]$
b) $x[n] + 0.5\,x[n-1] = d[n]$
c) $x[n] - 0.2\,x[n-1] = d[n-1]$
d) $x[n] + 1.2\,x[n-1] - x[n-2] = 2\,d[n]$
e) $x[n] + x[n-1] + \frac{1}{4}\,x[n-2] = d[n-1]$

19. Dada $x \in S_f$ finita.
Definimos la llamada "autocorrelación" de x mediante $\mathcal{A}c(x)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,x[n+k]$.
a) Calcular la autocorrelación de $\prod_{[0,3]}$ y de $r \prod_{[1.,3]}$
b) Demostrar que $\mathcal{A}c(x) = x * x'$ donde $x'[n] = x[-n]$
c) Escribir la transformada Z de $\mathcal{A}c(x)$ en términos de $X(z)$ usando b).
d) Calcular la autocorrelación de $\{0_0, 1, -1, 1\}$ mediante c) .
e) Idem para $2^{-n}\,u[n]$.