Procesos y Máquinas Industriales II

Clase IV

Prof. Mariana Suarez

27 de agosto de 2018

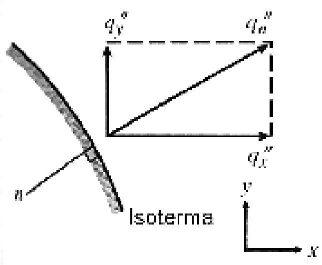
Plan de la clase

- Procesos térmicos: metodología para aplicar leyes de conservación
- Conducción: La ley de Fourier
- Ecuación de difusión del calor en coordenadas cartesianas

Metodología para aplicación de las leyes de conservación

1. Definir el volumen de control, señalando la superficie de control (línea punteada.)
2. Identificar la base de tiempo.
3. Identificar los procesos relevantes de transferencia de energía.
   Señalarlos en el volumen de control.
4. Escribir las ecuaciones de conservación.
   Reemplazar en ellas las expresiones de velocidad de transferencia.

Ecuación de velocidad para la conducción: Ley de Fourier



$$q_x = -k\,A\,\frac{dT}{dx} \Longrightarrow q''_x = \frac{q_x}{A} = -k\,\frac{dT}{dx}$$

$\surd$ Densidad de flujo de calor: normal a una sup. de temperatura constante (isoterma).

Ecuación de velocidad para la conducción: Ley de Fourier (cont.)

$$q'' = q''_x i + q''_y j + q''_z k$$

Con

$$\begin{aligned} q''_x &= -k \frac{\partial T}{\partial x} \\ q''_y &= -k \frac{\partial T}{\partial y} \\ q''_z &= -k \frac{\partial T}{\partial z} \end{aligned} \quad (1)$$

$\surd$ Medio isotrópico $\rightarrow$ k es independiente de la dirección.

Ley de Fourier (síntesis)

- No es expresión derivada de primeros principios.
- Es ley fenomenológica.
- Define la conductividad térmica, importante propiedad de los materiales.
- Es expresión vectorial que indica que la densidad de flujo es normal a una isoterma y en dirección de las temperaturas decrecientes.
- Se aplica a cualquier material, sin importar su estado de agregación (sól., líq., gas)

Ecuación de difusión del calor

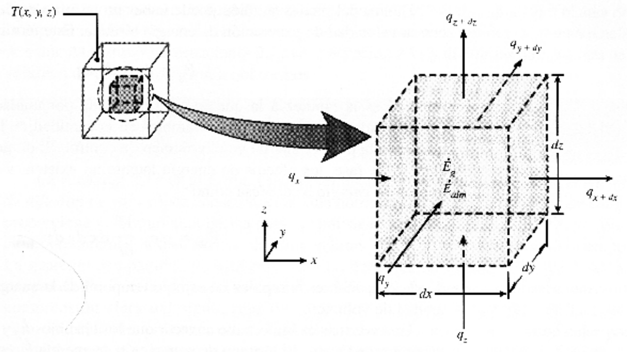
Objetivo:
Determinar el campo de temp. en un medio con determinadas condic. en sus límites
$\longmapsto$ *distribución de la temperatura en función de la posición.*
Pasos:

- Definir volumen de control *diferencial*
- Identificar procesos relevantes de transferencia de energía.
- Introducir las ecuaciones de velocidad apropiadas.

$\longmapsto$ ED cuya solución, para cond. de contorno dadas, provee la *distribución de temperatura* en el medio.

Análisis para el volumen de control diferencial en coordenadas cartesianas

- Esquema



- Base de tiempo: instantánea.

- <u>Término de entrada</u>

$$\dot{E}_e = q_x + q_y + q_z$$

q_x, q_y, q_z: veloc. de transf. por conducción, normales a cada sup. de control.

- <u>Término de salida</u>

$$\dot{E}_s = q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz}$$

Procesos relevantes en la transferencia de energía (cont.)

Aplicando desarrollo de Taylor, despreciando términos de orden sup.

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \quad (2)$$

$$q_{y+dy} = q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \quad (3)$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \quad (4)$$

Procesos relevantes en la transferencia de energía (cont.)

- Término de generación

$$\dot{E}_g = \dot{q}\, dx\, dy\, dz \qquad dV = dx\, dy\, dz$$

$\dot{q}$: veloc. de gener. de energía por u. de vol. $[W/m^3]$

- Término de acumulación

$$\dot{E}_a = \rho\, c_p \frac{\partial T}{\partial t}\, dx\, dy\, dz$$

- Ec. de conservación de la energía, base instantánea.

$$\dot{E}_e + \dot{E}_g - \dot{E}_s = \dot{E}_a \tag{5}$$

Reemplazando en (5) las expresiones de cada término:

$$q_x + q_y + q_z + \dot{q}\, dx\, dy\, dz - q_{x+dx} - q_{y+dy} - q_{z+dz} = \rho\, c_p \frac{\partial T}{\partial t}\, dx\, dy\, dz \tag{6}$$

Primer principio de la termodinámica (cont.)

Aplicando las ecuaciones (2)

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x}\,dx-\frac{\partial q_y}{\partial y}\,dy-\frac{\partial q_z}{\partial z}\,dz+\dot{q}\,dx\,dy\,dz=\rho\,c_p\,\frac{\partial T}{\partial t}\,dx\,dy\,dz \tag{7}$$

Por la Ley de Fourier,

$$q_x = -k\,dy\,dz\,\frac{\partial T}{\partial x} \tag{8}$$

$$q_y = -k\,dx\,dz\,\frac{\partial T}{\partial y} \tag{9}$$

$$q_z = -k\,dx\,dy\,\frac{\partial T}{\partial z} \tag{10}$$

Primer principio de la termodinámica (cont.)

Reemplazando (8) en (7), dividiendo m.a.m. por $dx\,dy\,dz$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\,\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\,\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\,\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{q}=\rho\,c_p\,\frac{\partial T}{\partial t} \quad (11)$$

$\mapsto$ Ec. de difusión del calor en coordenadas cartesianas.

Casos particulares

Simplificaciones

- $k = cte.$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

con $\alpha = \frac{k}{\rho c_p}$, difusividad térmica.

- estado estacionario, $\dot{E}_a = 0$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial T}{\partial z}\right) + \dot{q} = 0 \quad (12)$$

Casos particulares (cont.)

- transferencia unidimensional, $\dot{E}_g = 0$

$$\frac{d}{dx}\left(k\,\frac{dT}{dx}\right) = 0$$

$\surd$ Estado estacionario, conducción unidimensional, sin generación de energía:
$\longrightarrow$ densidad de flujo de calor constante en la dirección de transferencia.

$$\frac{dq"_x}{dx} = 0$$

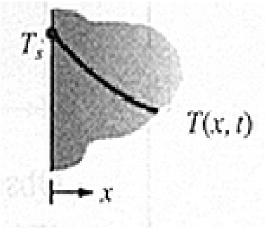
Nota: $q"_x$ es constante en la dirección x

Condiciones de contorno

- Temperatura superficial constante (Primera Clase)

$$T(0,t) = T_s$$

(*Condición de Dirichlet*)

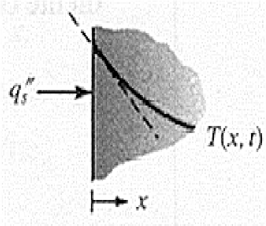


Condiciones de contorno (cont.)

- Densidad de flujo superficial constante (Segunda Clase)
  1. Densidad de flujo de calor finita

$$-k\frac{\partial T}{\partial x} = q"_s$$

(*Condición de Neumann*)



Condiciones de contorno (cont.)

- Condición de convección en la superficie (Tercera Clase)

$$-k\frac{\partial T}{\partial x} = h[T_\infty - T(0,t)]$$