Procesos y Máquinas Industriales II
Clase II

Prof. Mariana Suarez

Ecuaciones constitutivas

- Relacionan magnitudes del sistema entre sí, permitiendo integrar las ecuaciones dinámicas.
- Describen física/químicamente al sistema.

Ejemplo: conducción del calor

q": flujo de calor (magnitud dinámica)
T: temperatura (variable de estado.)

$\surd$ Ecuación de Fourier:

$$q" = -k \frac{dT}{dx}$$

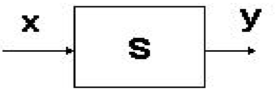
$\surd$ k: conductividad térmica (parámetro).

√ Identificación del sistema: proceso para determinar el valor de los parámetros.

√ Se realiza: $\begin{cases} midiendo\ (experimentalmente) \\ calculando\ (analitica\ o\ numericamente) \end{cases}$

Algunas definiciones

Analicemos un sistema representado por el siguiente diagrama de bloques.



Algunas definiciones

Estabilidad externa(estabilidad *bibo*, bounded input - bounded output)

$$entradas\ acotadas \Rightarrow salidas\ acotadas$$

Algunas definiciones

Definición: S es externamente estable (*bibo*), si

$$\forall u : \| u(t) \| \leq M_1 \quad -\infty < -T \leq t \leq \infty$$

la salida correspondiente y verifica que

$$\| y(t) \| \leq M_2 \quad -T \leq t \leq \infty$$

Proposición(sin dem.):
S es bibo estable$\Longleftrightarrow$ la respuesta impulsiva $h(t)$ cumple

$$\int_0^\infty \parallel h(t) \parallel dt \leq M < \infty$$

Problemas de la estabilidad *bibo*:

- no considera perturbaciones internas del sistema que pueden inestabilizarlo.
- vale sólo para condiciones iniciales nulas.

Otras formas de definir estabilidad

Definición: Equilibrio de un sistema

Sea el sistema

$$\dot{x} = f(x) \quad x \,\varepsilon\, \Re^n \qquad (1)$$

$$x(0) = x_0 \qquad (2)$$

para el cual existe una solución $\phi(t, x_0) = x(t)$, única.

Entonces, x_e *es un equilibrio de (1) si* $f(x_e) = 0$.

$\surd$ Observación: Si x_e es equilibrio de (1),

$$\phi(t, x_e) = x_e \;\; \forall t \geq 0$$

Otras formas de definir estabilidad

Definición: Estabilidad de Lyapunov.
Un equilibrio x_e de (1) es estable si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) \ tal \ que \ si$$

$$\| x_0 - x_e \| < \delta \Rightarrow \| \phi(t, x_0) - x_e \| < \varepsilon \ \forall t \geq 0$$

Otras formas de definir estabilidad

Definición: Estabilidad asintótica.
Un equilibrio de (1) es asintóticamente estable si dados $\varepsilon > 0$, $\mu > 0$, ($\mu < \varepsilon$) existen $\delta, T > 0$ tales que:

$$\| x_0 - x_e \| < \delta \Rightarrow \| \phi(t, x_0) - x_e \| < \varepsilon \ \forall t \geq 0$$

$$y \ \ \| \phi(t, x_0) - x_e \| < \mu \ \forall t \geq T.$$

Otras formas de definir estabilidad

Definición: Estabilidad interna
El sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu && (3) \\ y &= Cx && (4) \end{aligned}$$

es internamente estable si $x(t)$, solución de

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax && (5) \\ x(0) &= x_0 && (6) \end{aligned}$$

cumple

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0, \quad \forall x_0$$

$\mapsto$ sistema asintóticamente estable en el origen.

Proposición (sin demostración):

El sistema (5) es internamente estable $\Longleftrightarrow$ la matriz A es Hurwitz.

Nota: A *Hurwitz* $\longrightarrow$ *todos sus autovalores con parte real negativa.*

Sistema internamente estable $\Longrightarrow$ externamente estable.

Algoritmos para integrar ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO’s)

- explícitos
- implícitos

Problemas:

- exactitud
- estabilidad numérica
- velocidad

Algoritmos para integrar ecuaciones diferenciales ordinarias(EDO's)

<u>Tamaño del intervalo de integración</u>

- No suficientemente pequeño
  1. solución no sufic. exacta
  2. inestabilidad numérica
- Intervalo muy pequeño $\longrightarrow$ aumenta tiempo de integración.

$\surd$ Además: mayor número de EDO's $\longrightarrow$ mayor tiempo.

Algoritmos explícitos para integración numérica

1. Euler
2. Runge-Kutta orden 4

Método de Euler

Sea la EDO

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t)$$

con $f(x,t)$ no lineal, y la cond. inicial $x(0) = x_0$, para $t = 0$.
Nos movemos hacia adelante en el tiempo un pequeño intervalo Δt
Para $t = t_1 = \Delta t$, se estima un nuevo valor de x, $x(\Delta t)$, por extrapolación lineal.
Entonces

$$\begin{aligned} x(\Delta t) &= x(0) + \frac{dx}{dt}\ \Delta t \\ x_1 &= x_0 + f(x_0,0)\,\Delta t \end{aligned} \tag{7}$$

Método de Euler

Sea ahora $t = t_2 = 2\Delta t$, $x(2\Delta t) = x_2$.

$$\begin{aligned} x(2\Delta t) &= x(\Delta t) + \frac{dx}{dt}\,\Delta t \\ x_2 &= x_1 + f(x_1, t_1)\,\Delta t \end{aligned} \tag{8}$$

Generalizando al paso $n+1$,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + f(x_n, t_n)\,\Delta t \\ t_{n+1} &= t_n + \Delta t \end{aligned} \tag{9}$$

$\surd$ Ventaja de Euler: fácil de programar.

Método de Euler

Sea el sistema de dos EDO's:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, t) \end{aligned}$$

Los algoritmos de integración de Euler quedarán:

$$\begin{aligned} x_{1,n+1} &= x_{1,n} + f_1(x_{1n}, x_{2n}, t_n)\,\Delta t \\ x_{2,n+1} &= x_{2,n} + f_2(x_{1n}, x_{2n}, t_n)\,\Delta t \end{aligned} \tag{10}$$

Método de Runge-Kutta de orden 4

Sea la EDO

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t)$$

con $f(x,t)$ no lineal, y la cond. inicial $x(0) = x_0$, para $t = 0$.
Se definen:

$$\begin{aligned}
k_1 &= \Delta t \; f(x_n, t_n) \\
k_2 &= \Delta t \; f(x_n + \frac{1}{2}k_1, t_n + \frac{1}{2}\Delta t) \\
k_3 &= \Delta t \; f(x_n + \frac{1}{2}k_2, t_n + \frac{1}{2}\Delta t) \\
k_4 &= \Delta t \; f(x_n + k_3, t_n + \Delta t) \\
x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad (11)
\end{aligned}$$

Método de Runge-Kutta de orden 4

Para integrar dos EDO's

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, t) \end{aligned}$$

Comparación Euler-Runge Kutta

- Si se requiere exactitud $\rightarrow$ Runge-Kutta.
  A igual tiempo de computación, R-K más exacto.
- Si no se requiere exactitud $\rightarrow$ Euler.
  Euler es tan estable como R-K, pero más rápido.