Procesos y Máquinas Industriales II- Clase X

Prof. Mariana Suarez

28 de septiembre de 2018

Plan de la clase

- Ecuaciones diferenciales de flujo de fluídos: La ecuación de continuidad

Plan de la clase

- Ecuaciones diferenciales de flujo de fluídos: La ecuación de continuidad
- Ecuaciones de Navier-Stokes

Ecuaciones diferenciales de flujo de fluídos

La ecuación de continuidad diferencial

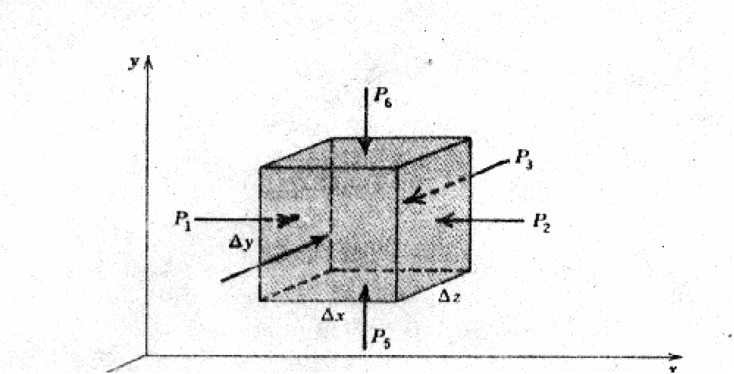
Como vimos, la expresión integral queda

$$\int\int_S \rho(\bar{v}.\bar{n})\, dS + \frac{\partial}{\partial t}\int\int\int_V \rho\, dV = 0$$

Analizaremos ahora el balance de masa o ecuación de continuidad en su forma diferencial.

Ecuación de continuidad diferencial

Sea el volumen de control diferencial



Ecuación de continuidad diferencial

En este caso, los términos del balance de masa quedan como sigue.

- Rapidez de cambio de masa dentro del VC diferencial:

$$\frac{\partial}{dt}(\rho \Delta x \Delta y \Delta z)$$

Ecuación de continuidad diferencial

En este caso, los términos del balance de masa quedan como sigue.

- Rapidez de cambio de masa dentro del VC diferencial:

$$\frac{\partial}{dt}(\rho \Delta x \Delta y \Delta z)$$

- Flujo neto de masa que sale del VC en la dirección x:

$$\left(\rho\, v_x]_{x+\Delta x} - \rho\, v_x]_x\right) \Delta y \Delta z$$

Ecuación de continuidad diferencial

En este caso, los términos del balance de masa quedan como sigue.

- Rapidez de cambio de masa dentro del VC diferencial:

$$\frac{\partial}{dt}(\rho \Delta x \, \Delta y \, \Delta z)$$

- Flujo neto de masa que sale del VC en la dirección x:

$$\left(\rho \, v_x\right]_{x+\Delta x} - \rho \, v_x\left]_x\right) \Delta y \, \Delta z$$

- Flujo neto de masa que sale del VC en la dirección y:

$$\left(\rho \, v_y\right]_{y+\Delta y} - \rho \, v_y\left]_y\right) \Delta x \, \Delta z$$

Ecuación de continuidad diferencial

En este caso, los términos del balance de masa quedan como sigue.

- Rapidez de cambio de masa dentro del VC diferencial:

$$\frac{\partial}{dt}(\rho \Delta x \, \Delta y \, \Delta z)$$

- Flujo neto de masa que sale del VC en la dirección x:

$$\left(\rho \, v_x \right]_{x+\Delta x} - \rho \, v_x \big]_x \Big) \, \Delta y \, \Delta z$$

- Flujo neto de masa que sale del VC en la dirección y:

$$\left(\rho \, v_y \right]_{y+\Delta y} - \rho \, v_y \big]_y \Big) \, \Delta x \, \Delta z$$

- Flujo neto de masa que sale del VC en la dirección z:

$$\left(\rho \, v_z \right]_{z+\Delta z} - \rho \, v_z \big]_z \Big) \, \Delta x \, \Delta y$$

La ecuación de continuidad diferencial

Sustituyendo en la ecuación de conservación de masa, se llega a

$$\left(\rho\, v_x]_{x+\Delta x} - \rho\, v_x]_x\right) \Delta y\, \Delta z + \left(\rho\, v_y]_{y+\Delta y} - \rho\, v_y]_y\right) \Delta x\, \Delta z + \\ + \left(\rho\, v_z]_{z+\Delta z} - \rho\, v_z]_z\right) \Delta x\, \Delta y + \frac{\partial}{dt}(\rho\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z) = 0$$

Dividiendo por $\Delta x\, \Delta y\, \Delta z$ y pasando al límite.

$$\frac{\partial}{\partial x}\rho\, v_x + \frac{\partial}{\partial y}\rho\, v_y + \frac{\partial}{\partial z}\rho\, v_z + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

La ecuación de continuidad diferencial

Teniendo en cuenta que

$$div(\rho\,\overline{v}) = \nabla\rho\,\overline{v} = \frac{\partial}{\partial x}\rho\,v_x + \frac{\partial}{\partial y}\rho\,v_y + \frac{\partial}{\partial z}\rho\,v_z$$

La ecuación de continuidad queda:

$$\nabla\rho\,\overline{v} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

La ecuación de continuidad diferencial

Si el flujo es incompresible $\Rightarrow \rho = const.$

$$\nabla \overline{v} = 0$$

La ec. diferencial también puede escribirse

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} v_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} v_y + \frac{\partial \rho}{\partial z} v_z + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

La ecuación de continuidad diferencial

Derivada sustancial en coordenadas cartesianas

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x} v_x + \frac{\partial}{\partial y} v_y + \frac{\partial}{\partial z} v_z + \frac{\partial}{\partial t}$$

Se obtiene entonces

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla . \overline{v} = 0$$

$\surd$ $\frac{D}{Dt}$ es la derivada que sigue el movimiento del fluído.
$\rightarrow$ rapidez de cambio de un fluído o flujo variable a lo largo de la trayectoria de un elem. de fluído.

Algunas consideraciones acerca de la viscosidad

- La viscosidad de un fluído es una medida de su resistencia a la deformación.
- Su equivalente en los sólidos es el módulo de elasticidad.
- Es una función de la temperatura, la presión y la composición.

Ley de Newton de la viscosidad

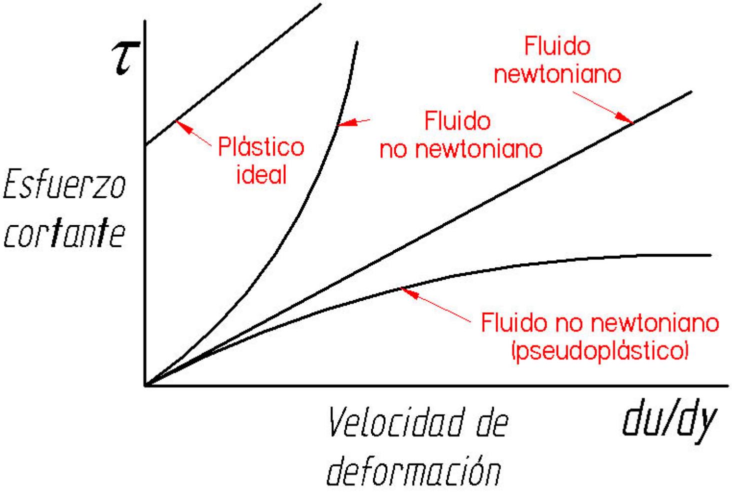
$$\mu = \frac{\text{esfuerzo cortante}}{\text{rapidez de deformación cortante}}$$

Esta igualdad puede escribirse como sigue

$$\tau = \mu \frac{dv}{dy}$$

Para los fluídos llamados newtonianos, la gráfica $\tau = f(\frac{dv}{dy})$ es lineal.

Ley de Newton de la viscosidad



Ecuaciones de Navier-Stokes

El equilibrio total de momento lineal (teorema del momento) se escribe

$$\sum \overline{F} = \int\int_S \rho\, \overline{v}(\overline{v}\,.\,\overline{n})\, dS + \frac{\partial}{\partial t}\int\int\int_V \overline{v}\,\rho\, dV$$

Para el caso diferencial $\rightarrow$ *ecuaciones de Navier-Stokes*

Ecuaciones de Navier-Stokes

Teniendo en cuenta los términos:

- Suma de las fuerzas externas:
  Deben considerarse: esfuerzos normales, esfuerzos cortantes, fuerzas de cuerpo.
  Eje x:

$$\lim_{\Delta x,\Delta y,\Delta z\to 0}\frac{\sum F_x}{\Delta x.\Delta y.\Delta z}=\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+\rho\, g_x$$

Análogamente, se obtiene la fuerza neta en las direcciones y y z.

Ecuaciones de Navier-Stokes

En cuanto a la variación de momento en el VC,

- Flujo neto de momento a través del VC

$$\lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0} \frac{\int\int_S \rho\, \overline{v}(\overline{v}\,.\,\overline{n})\, dS}{\Delta x . \Delta y . \Delta z}$$

- Rapidez de cambio de momento dentro del VC

$$\lim_{\Delta x, \Delta y, \Delta z \to 0} \frac{\frac{\partial}{\partial t} \int\int\int_V \overline{v}\, \rho\, dV}{\Delta x . \Delta y . \Delta z}$$

Ecuaciones de Navier-Stokes

Se obtienen tres ecuaciones diferenciales para la segunda Ley de Newton

$$\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)=\rho g_x+\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)=\rho g_y+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=\rho g_z+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}$$

Ecuaciones de Navier-Stokes

Utilizando la derivada sustancial se obtiene:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{D v_x}{Dt} &= \rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \\
\rho \frac{D v_y}{Dt} &= \rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \\
\rho \frac{D v_z}{Dt} &= \rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}
\end{aligned}$$

Ecuaciones de Navier-Stokes

Relaciones de Stokes para la viscosidad

Permiten extender el concepto de viscosidad dado por la Ley de Newton a un flujo laminar tridimensional. A partir de ellas, se obtienen expresiones para los esfuerzos cortantes y normales en función de la viscosidad y las componentes de la velocidad.

- Esfuerzos cortantes

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} &= \tau_{yx} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \\
\tau_{yz} &= \tau_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \\
\tau_{zx} &= \tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)
\end{aligned}$$

Ecuaciones de Navier-Stokes

Relaciones de Stokes para la viscosidad (cont.)

- Esfuerzos normales

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \mu\left(2\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3}\nabla.\overline{v}\right) - P \\
\sigma_{yy} &= \mu\left(2\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3}\nabla.\overline{v}\right) - P \\
\sigma_{zz} &= \mu\left(2\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3}\nabla.\overline{v}\right) - P
\end{aligned}$$

Ecuaciones de Navier-Stokes

Utilizando las relaciones de Stokes para la viscosidad, se obtienen finalmente

Ecuaciones de Navier- Stokes

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{3}\mu \nabla.\overline{v}\right) + \nabla.\left(\mu \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \nabla.(\mu \nabla v_x)$$
$$\rho \frac{Dv_y}{Dt} = \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2}{3}\mu \nabla.\overline{v}\right) + \nabla.\left(\mu \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \nabla.(\mu \nabla v_y)$$
$$\rho \frac{Dv_z}{Dt} = \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2}{3}\mu \nabla.\overline{v}\right) + \nabla.\left(\mu \frac{\partial v}{\partial z}\right) + \nabla.(\mu \nabla v_z)$$

Casos particulares

- Flujo incompresible, viscosidad constante.

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \frac{Dv_y}{Dt} = \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \frac{Dv_z}{Dt} = \rho g_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)$$

Casos particulares

En forma más compacta, puede escribirse

$$\rho \frac{D\overline{v}}{Dt} = \rho\,\overline{g} - \nabla P + \mu\,\nabla^2\overline{v}$$

donde las suposiciones son:

- flujo incompresible
- viscosidad constante
- flujo laminar

- Flujo no viscoso ($\mu = 0$), Ecuación de Euler

$$\rho \frac{D\overline{v}}{Dt} = \rho\,\overline{g} - \nabla P$$