

PROCESOS Y MÁQUINAS INDUSTRIALES II

CLASE VII

Prof. Mariana Suarez

14 de septiembre de 2018

Plan de la clase

→ 1ra Parte

- Conducción en estado transitorio
- Validez del método
- Casos simplificados
- Efectos espaciales
- Adimensionalización
- Pared plana con convección

Plan de la clase (cont.)

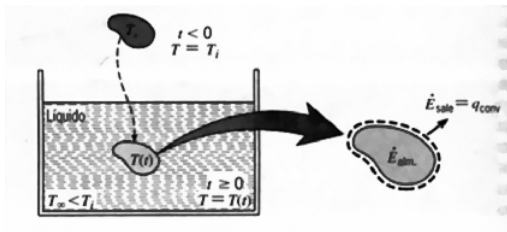
→ **2da Parte**

✓ Soluciones gráficas para diferentes geometrías

- En una placa plana
- En un cilindro largo
- En una esfera
- En sistemas bi y tridimensionales

Conducción en estado transitorio

Sólido con cambio repentino en su medio térmico



Suposición: grad de temperatura en el sólido despreciable.

Conducción en estado transitorio (cont.)

Por Ley de Fourier, conducción de calor sin gradiente de T:

$$k \rightarrow \infty \text{ (imposible)}$$

Es aceptable si $R_{cond} \lll R_{conv}$

Balance de energía total:

$$\begin{aligned} -\dot{E}_s &= \dot{E}_a \\ -hA_s(T - T_\infty) &= \rho V c \frac{dT}{dt} \end{aligned}$$

Cambio de variables: $\theta = T - T_\infty \rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{dT}{dt}$

Conducción en estado transitorio (cont.)

Se obtiene

$$\frac{\rho V c}{h A_s} \frac{d\theta}{dt} = -\theta$$

Separando var. e integrando, con las condiciones iniciales:

$$t = 0 \rightarrow T(0) = T_i$$

$$\begin{aligned} -\frac{\rho V c}{h A_s} \int_{\theta_i}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta} &= \int_0^t dt \\ -\frac{\rho V c}{h A_s} \ln \frac{\theta}{\theta_i} &= t \end{aligned}$$

Conducción en estado transitorio (cont.)

Entonces

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{\left(\frac{-hA_s}{\rho V c}\right)t}$$

Observemos que: $t \rightarrow \infty \implies T - T_\infty \rightarrow 0$

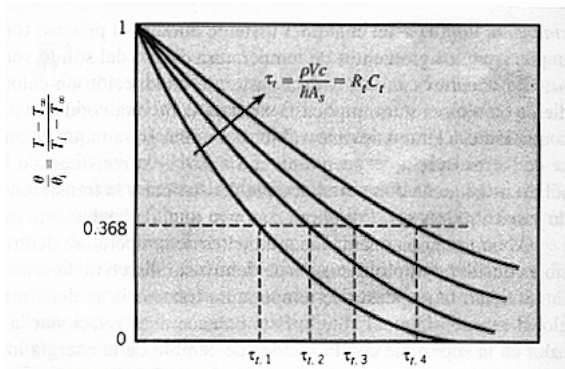
✓ Constante de tiempo térmica τ_t :

$$\tau_t = \frac{1}{hA_s} \rho V c = R_t C_t$$

donde

- R_t : resistencia a la transferencia por convección
- C_t : capacitancia térmica concentrada

Conducción en estado transitorio (cont.)



Conducción en estado transitorio (cont.)

Transferencia total de calor hasta un tiempo t

$$Q = \int_0^t q dt = hA_s \int_0^t \theta dt$$

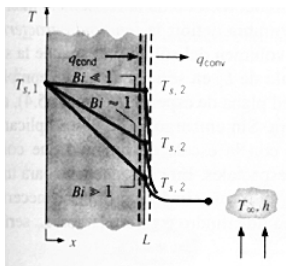
Reemplazando e integrando

$$\begin{aligned} Q &= \rho V c \theta_i [1 - e^{(-\frac{t}{\tau})}] \\ -Q &= \Delta E_a \end{aligned}$$

- $Q > 0$, disminución de energía interna, apagamiento
- $Q < 0$, aumento de energía interna, calentamiento

Validez del método

Pared plana, conducción estado estacionario



Balance de energía superficial

$$\frac{kA}{L} (T_{s1} - T_{s2}) = hA(T_{s2} - T_{\infty})$$

Validez del método (cont.)

La igualdad anterior puede escribirse

$$\frac{T_{s1} - T_{s2}}{T_{s2} - T_{\infty}} = \frac{L/kA}{1/hA} = \frac{R_{cond}}{R_{conv}} = \frac{hL}{k} = Bi$$

Bi: número de Biot

Conclusión: La hipótesis de temp. uniforme en el sólido es válida si $Bi \lll 1$, es decir:

resist. a la cond. en el sól. \lll resist. a la conv. en la capa
lím. fluído

Validez del método (cont.)

Para analizar conducción en estado transitorio, calcular Bi como

$$Bi = \frac{hL_c}{k}$$

L_c : longitud característica

$$L_c = \frac{V}{A_s} \begin{cases} \text{Pared plana, espesor } 2L : L_c = L \\ \text{Cilindro, radio } r_0 : L_c = \frac{r_0}{2} \\ \text{Esfera, radio } r_0 : L_c = \frac{r_0}{3} \end{cases}$$

Validez del método (cont.)

También puede escribirse:

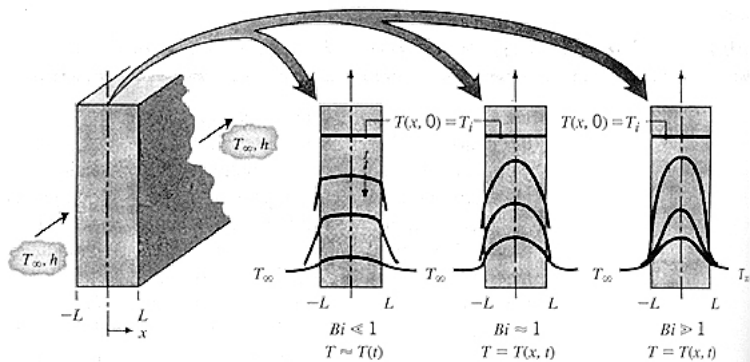
$$\frac{hA_s t}{\rho V c} = \frac{ht}{\rho c L_c} = \frac{hL_c}{k} \frac{k}{\rho c} \frac{t}{L_c^2} = \frac{hL_c}{k} \alpha \frac{t}{L_c^2} = Bi \cdot Fo$$

donde $Fo = \frac{\alpha t}{L_c^2}$ es el número de Fourier.

Entonces, la ecuación adimensional de la temperatura puede escribirse:

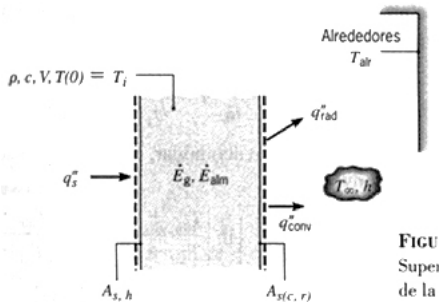
$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e^{(-BiFo)}$$

Validez del método (cont.)



Validez del método (cont.)

Análisis del método de la capacitancia concentrada:



Validez del método (cont.)

Principio de conservación de la energía instantánea

$$q''_s A_{sh} + \dot{E}_g - (q''_{conv} + q''_{rad}) A_{s(c,r)} = \rho V c \frac{dT}{dt}$$

$$q''_s A_{sh} + \dot{E}_g - [h(T - T_\infty) + \varepsilon \sigma (T^4 - T_{amb}^4)] A_{s(c,r)} = \rho V c \frac{dT}{dt}$$

- EDO de primer orden
- No lineal
- No homogénea
- Sin solución exacta

Casos simplificados

1- Convección despreciable frente a radiación

$$q''_s = 0 \quad \dot{E}_g = 0$$

$$\rho V c \frac{dT}{dt} = -\varepsilon \sigma (T^4 - T_{amb}^4) A_{s(c,r)}$$

Separando variables e integrando, se llega a

$$t = \frac{\rho V c}{4 \varepsilon A_{sr} \sigma T_{amb}^3} \left[\ln \left| \frac{T_{amb} + T}{T_{amb} - T} \right| - \ln \left| \frac{T_{amb} + T_i}{T_{amb} - T_i} \right| \right] + \frac{\rho V c}{2 \varepsilon A_{sr} \sigma T_{amb}^3} \left[\tan^{-1} \left(\frac{T}{T_{amb}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{T_i}{T_{amb}} \right) \right]$$

Casos simplificados (cont.)

Pero si $T_{amb} = 0$,

$$t = \frac{\rho V c}{3 \varepsilon A_{sr} \sigma} \left(\frac{1}{T^3} - \frac{1}{T_i^3} \right)$$

Casos simplificados (cont.)

2- Despreciando la radiación, $h \neq f(t)$

Introduciendo $\theta = T - T_\infty$, queda:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{dT}{dt}$$

Entonces

$$\frac{d\theta}{dt} + a\theta - b = 0$$

donde

$$a = \frac{hA_{sc}}{\rho V c}$$
$$b = \frac{q''_s A_{sh} + \dot{E}_g}{\rho V c}$$

- EDO de primer orden, lineal y no homogénea

Casos simplificados (cont.)

La ecuación anterior puede resolverse:

- con la solución de la homogénea y una solución particular
- con un cambio de variables: $\theta' = \theta - \frac{b}{a}$

Como $\frac{d\theta'}{dt} = \frac{d\theta}{dt}$, se obtiene:

$$\frac{d\theta'}{dt} + a\theta' = 0 \Rightarrow \int_{\theta'_i}^{\theta'} \frac{d\theta'}{a\theta'} = \int_0^t -dt$$

Entonces

$$\frac{\theta'}{\theta'_i} = e^{-at}$$

Casos simplificados (cont.)

Sustituyendo

$$\frac{T - T_{\infty} - b/a}{T_i - T_{\infty} - b/a} = e^{-at}$$

$$\frac{T - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} = e^{-at} + \frac{b/a}{T_i - T_{\infty}}(1 - e^{-at})$$

- Si $b = 0$, $q''_s = 0$, $\dot{E}_g = 0$ se obtiene la ecuación
- Si $t \rightarrow \infty$, $T - T_{\infty} = \frac{b}{a}$

Efectos espaciales

√ Si el gradiente de T no es despreciable \rightarrow otro método.

En la ecuación de calor en su forma general,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Suposiciones:

- transferencia unidimensional
- $\dot{E}_g = 0$
- $k = cte.$

Efectos espaciales(cont.)

- Condición inicial $T(x,0) = T_i$
- Condiciones de contorno

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right]_{x=0} = 0$$
$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right]_{x=L} = h [T(L,t) - T_\infty]$$

Se ve que la temperatura de la pared depende de varios parámetros físicos:

$$T = T(x,t, T_i, T_\infty, L, k, \alpha, h)$$

Adimensionalización

Agrupar var. relevantes definiendo parámetros adimensionales

- Temperatura

$$\theta = T - T_{\infty}$$

$$\theta_i = T_i - T_{\infty}$$

$$\theta^* = \frac{\theta}{\theta_i} \quad 0 \leq \theta^* \leq 1$$

- Coordenada espacial

$$x^* = \frac{x}{L}$$

- Tiempo

$$t^* = \frac{\alpha t}{L^2} = Fo$$

Adimensionalización (cont.)

La ecuación de calor queda:

$$\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial x^{*2}} = \frac{\partial \theta^*}{\partial Fo}$$

- Condición inicial

$$\theta^*(x^*, 0) = 1$$

- Condiciones de contorno

$$\left. \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} \right]_{x^*=0} = 0$$
$$\left. \frac{\partial \theta^*}{\partial x^*} \right]_{x^*=1} = -Bi \theta^*(1, t^*)$$

Adimensionalización (cont.)

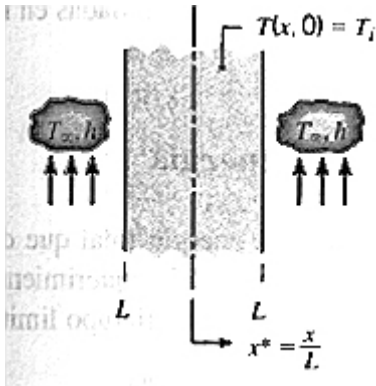
Entonces adimensionalmente,

$$\theta^* = f(x^*, Bi, Fo)$$

Pared plana con convección

1- Solución exacta

Sea la pared plana de espesor $2L$



Pared plana con convección (cont.)

Suposiciones

- conducción unidimensional en x .
- Distrib. inicial de temp. uniforme $T(x, 0) = T_i$

Además, distrib. simétrica respecto del plano medio ($x^* = 0$)

Solución exacta

$$\theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{(-\xi_n^2 Fo)} \cos(\xi_n x^*) \quad (1)$$

Pared plana con convección (cont.)

donde

$$C_n = \frac{4 \operatorname{sen} \xi_n}{2 \xi_n + \operatorname{sen} 2 \xi_n}, \quad Fo = \frac{\alpha t}{L^2}$$

Los autovalores de ξ_n son las raíces positivas de la ecuación trascendente:

$$\xi_n \tan \xi_n = Bi$$

Pared plana con convección (cont.)

2- Solución aproximada

Se puede dem. que para $Fo > 0,2$, la ecuación (1) puede aproximarse con el primer término de la serie.

Entonces se obtienen

$$\theta^* = C_1 e^{(-\xi_1^2 Fo)} \cos(\xi_1 x^*)$$
$$\theta^* = \theta_0^* \cos(\xi_1 x^*)$$

Con $\theta_0^* = \frac{T_0 - T_\infty}{T_i - T_\infty} = C_1 e^{(-\xi_1^2 Fo)}$ en $x^* = 0$

✓ C_1 y ξ_1 están tabulados para un rango determinado de Bi

Pared plana con convección (cont.)

3- Transferencia total de energía

Dato: energía total hasta un instante t .

Aplicando conservación de energía para un Δt ,

$$\begin{aligned}E_e - E_s &= \Delta E_a \\Q &= -[E(t) - E(0)] \\Q &= - \int \rho c [T(x,t) - T_i] dV\end{aligned}$$

Se integra sobre el volumen de pared.

Pared plana con convección (cont.)

Adimensionalizando, $Q_0 = \rho V c (T_i - T_\infty)$

Q_0 : energía interna inicial de la pared relativa a la temp. del fluido

Sup. propiedades constantes,

$$\frac{Q}{Q_0} = \int \frac{-[T(x,t) - T_i]}{T_i - T_\infty} \frac{dV}{V_p} = \frac{1}{V_p} \int (1 - \theta^*) dx^*$$

siendo $V_p = A.L$, y $dV = A.L.dx^*$

Pared plana con convección (cont.)

Usando la sol. aproximada para pared plana, se integra la ec. anterior

$$\frac{Q}{Q_0} = 1 - \frac{\text{sen } \xi_1}{\xi_1} \theta_0^*$$

Pared plana con convección (cont.)

4- Consideraciones adicionales

- Se aplica lo anterior a pared plana de espesor L aislada en $x^* = 0$ con convección en $x^* = 1$
- También para respuesta transitoria, pared plana, cambio repentino en temp. superf. T_s
 $h \rightarrow \infty \Rightarrow Bi \rightarrow \infty$
- Existe representación gráfica de la sol. aproximada para $Fo > 0,2$, cond.unidimensional, est. transitorio.

Soluciones gráficas para diferentes geometrías

Conducción en estado transitorio en una placa plana

- Placa plana de espesor $2x_1$ en la dirección x , con grandes dimensiones en las direcciones y y z
- Transferencia de calor sólo en las dos superficies planas y paralelas en la dirección x
- Temperatura inicial uniforme en la placa T_0 . Temperatura del ambiente T_1

Soluciones gráficas para diferentes geometrías (cont.)

Soluciones gráficas

- Gurney and Lurie: Permite determinar las temperaturas para cualquier posición y para cualquier instante de tiempo
- Heisler: Permite determinar las temperaturas en el centro de la placa para cualquier instante de tiempo

Soluciones gráficas para diferentes geometrías (cont.)

- Parámetros adimensionales utilizados

Temperatura adimensional:

$$Y = \frac{T_1 - T}{T_1 - T_0} \qquad 1 - Y = \frac{T - T_0}{T_1 - T_0}$$

Tiempo adimensional:

$$X = \frac{\alpha t}{x_1^2} = Fo$$

Posición adimensional:

$$n = \frac{x}{x_1}$$

Inverso del Número de Biot:

$$m = \frac{k}{hx_1}$$

Soluciones gráficas para diferentes geometrías (cont.)

Conducción en estado transitorio en un cilindro largo

- Cilindro largo, con conducción unidimensional radial
- Transferencia de calor en los extremos puede ser despreciada, o éstos se encuentran aislados
- Temperatura inicial uniforme en el cilindro T_0 . Temperatura del ambiente T_1

Soluciones gráficas para diferentes geometrías (cont.)

Soluciones gráficas

- Gurney and Lurie: Permite determinar las temperaturas para cualquier posición y para cualquier instante de tiempo
- Heisler: Permite determinar las temperaturas en el centro del cilindro para cualquier instante de tiempo

Soluciones gráficas para diferentes geometrías (cont.)

Conducción en estado transitorio en una esfera

Soluciones gráficas

- Gurney and Lurie: Permite determinar las temperaturas para cualquier posición y para cualquier instante de tiempo
- Heisler: Permite determinar las temperaturas en el centro de la esfera para cualquier instante de tiempo

Soluciones gráficas para diferentes geometrías (cont.)

Conducción en estado transitorio en sistemas bi y tridimensionales

Principio de superposición

Newman demostró matemáticamente cómo combinar las soluciones para la conducción unidimensional en las direcciones x , y y z , obteniendo una solución total para la conducción simultánea en las tres direcciones

Soluciones gráficas para diferentes geometrías (cont.)

Ejemplo 1

Bloque de caras rectangulares, dimensiones $2x_1, 2y_1, 2z_1$.

Parámetros adimensionales utilizados:

$$Y_x = \frac{T_1 - T_x}{T_1 - T_0}$$
$$X = \frac{\alpha t}{x_1^2} = Fo$$
$$n = \frac{x}{x_1}$$
$$m = \frac{k}{hx_1}$$

T_x es la temperatura a tiempo t y en la posición x desde la línea central.

Soluciones gráficas para diferentes geometrías (cont.)

$$Y_y = \frac{T_1 - T_y}{T_1 - T_0}$$
$$X_y = \frac{\alpha t}{y_1^2} = Fo$$
$$n = \frac{y}{y_1}$$
$$m = \frac{k}{hy_1}$$

T_y es la temperatura a tiempo t y en la posición y desde la línea central.

Soluciones gráficas para diferentes geometrías (cont.)

$$Y_z = \frac{T_1 - T_z}{T_1 - T_0}$$
$$X_z = \frac{\alpha t}{z_1^2} = Fo$$
$$n = \frac{z}{z_1}$$
$$m = \frac{k}{hz_1}$$

T_z es la temperatura a tiempo t y en la posición z desde la línea central.

Soluciones gráficas para diferentes geometrías (cont.)

Para la transferencia simultánea en las tres direcciones,

$$Y_{x,y,z} = (Y_x)(Y_y)(Y_z) = \frac{T_1 - T_{x,y,z}}{T_1 - T_0}$$

$T_{x,y,z}$ es la temperatura a tiempo t y en la posición x, y, z desde el centro del bloque rectangular

Soluciones gráficas para diferentes geometrías (cont.)

Ejemplo 2: Cilindro corto, dimensiones: radio x_1 , longitud $2y_1$

Parámetros adimensionales utilizados:

- Y_x : se obtiene de las figuras para conducción radial en un cilindro largo.
- Y_y , conducción entre dos planos paralelos, se obtiene de las figuras de conducción en una placa plana.
- Transferencia simultánea en las dos direcciones:

$$Y_{x,y} = (Y_x)(Y_y) = \frac{T_1 - T_{x,y}}{T_1 - T_0}$$

Bibliografía

Bibliografía: Geankoplis, Christie: *Transport processes and unit operations*, Prentice Hall, Third Edition, 1993.