Procesos y Máquinas Industriales II- Clase V

Prof. Mariana Suarez

4 de septiembre de 2018

Plan de la clase

- Conducción unidimensional en estado estacionario, sin generación de energía: la pared plana
- Analogía térmico-eléctrica: Resistencia térmica, circuito equivalente.
- Análisis alternativo para la conducción
- Sistemas radiales

Distribución de temperaturas en la pared plana unidimensional

$$\frac{d}{dx}\left(k\,\frac{dT}{dx}\right) = 0 \tag{1}$$

$\surd$ Estado estacionario, conducción unidimensional, sin generación de energía: $\longrightarrow$ densidad de flujo de calor constante en la dirección de transferencia.

$$\frac{dq''_x}{dx} = 0$$

Si $k = cte.$, integrando (1)

$$T(x) = C_1\,x + C_2 \tag{2}$$

$\surd$ C_1 y C_2 se obtienen por condiciones de contorno.

Distribución de temperaturas en la pared plana unidimensional (cont.)

Con condic. de primera clase en $x = 0$ y $x = L$

$$\begin{aligned} T(0) &= T_{s,1} \\ T(L) &= T_{s,2} \end{aligned} \tag{3}$$

Reemplazando (3) en (2):

$$C_2 = T_{s,1} \quad y \quad C_1 = \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{L}$$

La ecuación (2) queda:

$$T(x) = \frac{T_{s,2} - T_{s,1}}{L} x + T_{s,1}$$

Distribución de temperaturas en la pared plana unidimensional (cont.)

Por Ley de Fourier,

$$
\begin{aligned}
q_x &= -k\,A\,\frac{dT}{dx} \\
q_x &= \frac{kA}{L}\left(T_{s,1} - T_{s,2}\right) \\
q''_x &= \frac{k}{L}\left(T_{s,1} - T_{s,2}\right) \qquad (4)
\end{aligned}
$$

$\surd$ Observación: se ve que q_x es independiente de x.

Resistencia térmica

Por analogía entre difusión de calor y carga eléctrica $\rightarrow$ *resistencia térmica*

$$resistencia = \frac{potencial\ impulsor}{veloc.\ de\ transf.}$$

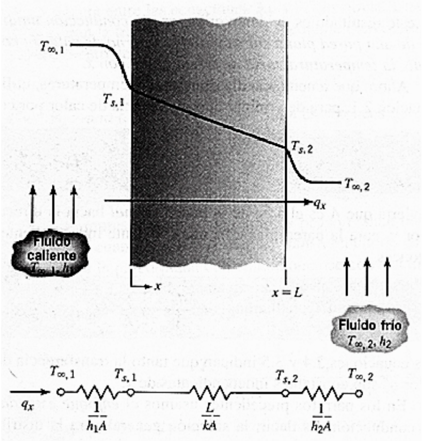
- Resistencia térmica por conducción:

$$R_{term,\,cond} = \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{q_x} = \frac{L}{kA}$$

- Resistencia térmica por convección:

$$R_{term,\,conv} = \frac{T_s - T_\infty}{q_{conv}} = \frac{1}{hA}$$

Esquema de la pared plana unidimensional



Análisis del circuito térmico equivalente

Circuito térmico equivalente

Como $q_x = cte.$,

$$
\begin{aligned}
q_x &= \frac{T_{\infty,1} - T_{s,1}}{\frac{1}{h_1 A}} \\
q_x &= \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{\frac{L}{kA}} \\
q_x &= \frac{T_{s,2} - T_{\infty,2}}{\frac{1}{h_2 A}}
\end{aligned}
$$

Análisis del circuito térmico equivalente (cont.)

El flujo de calor puede expresarse en términos del $\Delta T_{total} = T_{\infty,1} - T_{\infty,2}$ y de la resistencia total R_{tot}.

$$q_x = \frac{T_{\infty,1} - T_{\infty,2}}{R_{tot}}$$

donde

$$R_{tot} = \frac{1}{h_1 A} + \frac{L}{kA} + \frac{1}{h_2 A}$$

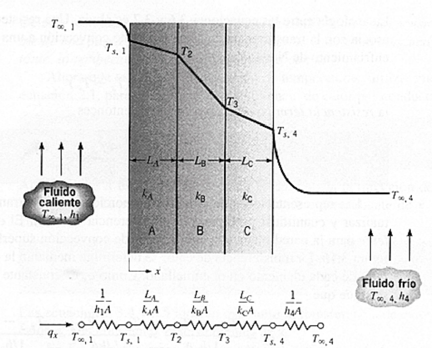
Radiación entre la superficie y el medio $\longrightarrow$

- Resistencia térmica por radiación:

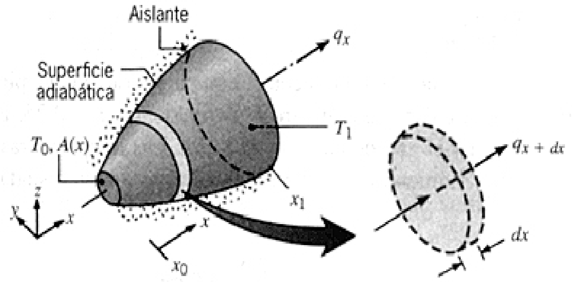
$$R_{term,rad} = \frac{T_s - T_{amb}}{q_{rad}} = \frac{1}{h_r A}$$

Ejercicio: pared compuesta en serie

Circuitos térmicos equivalentes pueden utilizarse para sistemas más complejos. Hallar una expresión para la resistencia total del circuito de la figura.



Otro enfoque para el problema de la conducción



Análisis alternativo para la conducción (cont.)

Estado estacionario, sin generación de calor, sin pérdidas

Vimos que, en este caso, $q_x = cte.$. Para un elemento diferencial dx,

$$q_{x+dx} = q_x$$

Ley de Fourier en forma integral

$$q_x \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{A(x)} = -\int_{T_0}^{T} k(T)\, dT$$

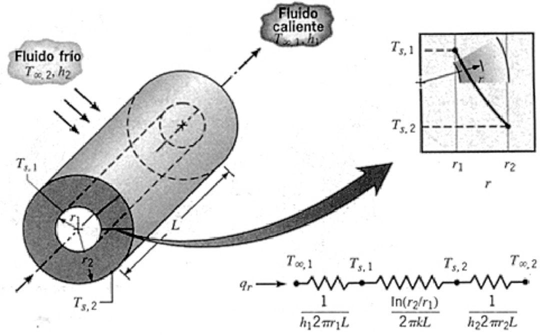
$\surd$ Si $A = cte.$, y $k = cte.$

$$\frac{q_x \, \Delta x}{A} = -k \, \Delta T$$

donde $\Delta x = x_1 - x_0$ y $\Delta T = T_1 - T_0$

Sistemas radiales: el cilindro

Cilindro hueco, sup. interna y externa expuestas a fluídos a diferentes temperaturas.



Sistemas radiales: el cilindro(cont.)

La ecuación de calor queda

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(kr\frac{dT}{dr}\right) = 0$$

La Ley de Fourier

$$q_r = -kA\frac{dT}{dr} = -k\,(2\,\pi\,r\,L)\frac{dT}{dr} \tag{5}$$

donde $A = 2\,\pi\,r\,L$
$\longrightarrow$ es el área normal a la transf. de calor.

Sistemas radiales: el cilindro(cont.)

Resolviendo la ec. de calor en el cilindro, con condic. de contorno apropiadas.
$k = cte.$, integrando

$$T(r) = C_1\, lnr + C_2$$

$\surd$ Para determinar C_1 y C_2 $\rightarrow$ condic. de contorno de primer orden.

$$\begin{aligned} T(r_1) &= T_{s,1} \\ T(r_2) &= T_{s,2} \end{aligned} \tag{6}$$

Sistemas radiales: el cilindro(cont.)

Reemplazando en $T(r)$

$$\begin{aligned} T_{s,1} &= C_1\, lnr_1 + C_2 \\ T_{s,2} &= C_1\, lnr_2 + C_2 \end{aligned} \tag{7}$$

Resolviendo se obtiene

$$T(r) = \frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{ln(\frac{r_1}{r_2})}\, ln\left(\frac{r}{r_2}\right) + T_{s,2} \tag{8}$$

Sistemas radiales: el cilindro(cont.)

Aplicando la ecuación (8) en la (5)

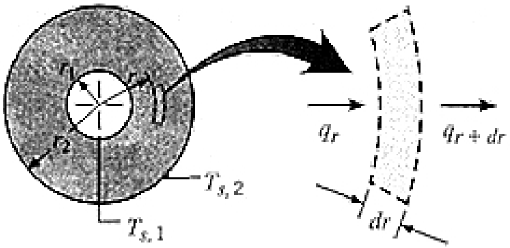
$$q_r = \frac{2\pi Lk(T_{s,1} - T_{s,2})}{ln(\frac{r_2}{r_1})} \tag{9}$$

Conducción radial, pared cilíndrica

$$R_{t,cond} = \frac{ln(\frac{r_2}{r_1})}{2\pi Lk}$$

Sistemas radiales: la esfera

Esfera hueca, estado estacionario, sin generación de calor, transferencia unidimensional.



Sistemas radiales: la esfera (cont.)

Entonces $q_r = q_{r+dr}$, y la ley de Fourier

$$q_r = -kA\frac{dT}{dr} = -k(4\,\pi\,r^2)\frac{dT}{dr}$$

donde $A = 4\,\pi\,r^2$ es el área normal a la dirección de transferencia.
Ley de Fourier en forma integral

$$\frac{q_r}{4\,\pi}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = -\int_{T_{s,1}}^{T_{s,2}} k(T)\,dT$$

Sistemas radiales: la esfera (cont.)

Si $k = cte$.

$$q_r = \frac{4\,\pi k\,(T_{s,1} - T_{s,2})}{\left(\frac{1}{r_1}\right) - \left(\frac{1}{r_2}\right)}$$

Resistencia:

$$R_{t,\,cond} = \frac{1}{4\,\pi k}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$