Procesos y Máquinas Industriales II- Clase VI

Prof. Mariana Suarez

7 de septiembre de 2018

Plan de la clase

- Análisis de la conducción unidimensional en estado estacionario y sin generación de energía en sistemas radiales: un ejemplo de aplicación (radio crítico de aislación)
- Conducción con generación de energía: la pared plana
- Conducción con generación de energía: sistemas radiales

Cond. unidimensional en sist.radiales: Ejemplo de aplicación

Análisis de la conducción en sistema cilíndrico:

Búsqueda de un radio óptimo de aislación

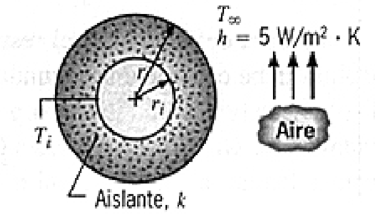
Espesor óptimo de aislación: Situación de competencia

- Resistencia a la conducción: aumenta con el espesor de aislación.
- Resistencia a la convección: disminuye con el espesor de aislación (aumenta la sup. externa)

$\rightarrow$ situación de compromiso

Cond. unidimensional en sist.radiales: Ejemplo de aplicación (cont.)

Objetivo: hallar un espesor de aislación que minimice pérdidas maximizando la resistencia total a la transferencia de calor.



Sustancia refrigerante, transportada en un tubo de cobre a una temperatura T_i menor que la del aire ambiente, T_∞. Si se aplica aislación al tubo, hallar el espesor óptimo.

Cond. unidimensional en sist.radiales: Ejemplo de aplicación (cont.)

Hipótesis:

1. Condic. estado estacionario.
2. Transferencia unidimensional, radial.
3. Resistencia térmica de la pared del tubo despreciable.
4. Propiedades constantes de aislación.
5. Intercambio de radiación entre la sup. externa de la aislación y el medio ambiente despreciable.

Análisis:

1. Resistencia térmica total por unidad de longitud de tubo a partir del circuito térmico equivalente:

$$R'_{tot} = \frac{ln\left(\frac{r}{r_i}\right)}{2\,\pi\,k} + \frac{1}{2\,\pi\,r\,h}$$

Veloc. de transf. por u. de long. de tubo:

$$q' = \frac{T_\infty - T_i}{R'_{tot}}$$

2. Espesor óptimo de aislación: (mínima q' o máxima R'_{tot})

$$\frac{dR'_{tot}}{dr} = \frac{1}{2\,\pi\,k\,r} - \frac{1}{2\,\pi\,r^2\,h} = 0 \Longrightarrow r = \frac{k}{h}$$

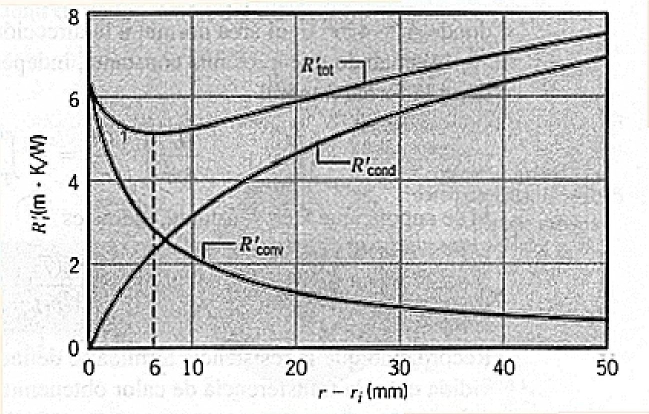
3. Evaluación de la segunda derivada (máx. o mín.?)

$$\frac{d^2\,R'_{tot}}{dr^2} = -\frac{1}{2\,\pi\,k\,r^2} + \frac{1}{\pi\,r^3\,h}$$

En $r = \frac{k}{h}$,

$$\frac{d^2 R'_{tot}}{dr^2} = \frac{1}{\pi (k/h)^2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{1}{2\pi k^3/h^2} > 0$$

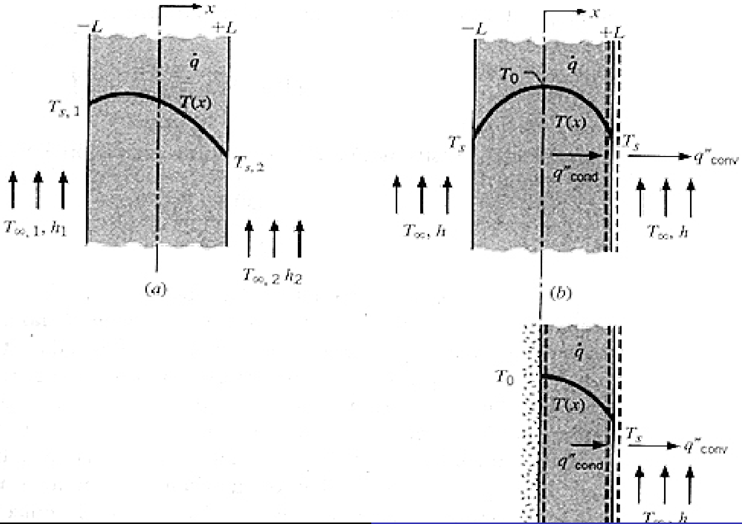
Entonces, la resistencia total para este radio es *mínima*.



Conclusión: No existe un radio óptimo de aislación. Conviene hablar de un *radio crítico*:

$$\boxed{r_{cr} = \frac{k}{h}}$$

La pared plana con generación de energía



La pared plana con generación de energía(cont.)

Ecuación de calor:

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}}{k} = 0$$

$$\boxed{T(x) = -\frac{\dot{q}}{2k}x^2 + C_1\,x + C_2}$$

Con condic. de primera clase en $x = -L$ y $x = L$

$$\begin{aligned} T(-L) &= T_{s,1} \\ T(L) &= T_{s,2} \end{aligned}$$

Despejando, se obtiene

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{T_{s2} - T_{si}}{2\,L} \\ C_2 &= \frac{\dot{q}}{2\,k}L^2 + \frac{T_{s2} + T_{s1}}{2} \end{aligned}$$

La pared plana con generación de energía(cont.)

Entonces

$$\boxed{T(x) = \frac{\dot{q}L^2}{2k}\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) + \frac{T_{s2} - T_{s1}}{2L}x + \frac{T_{s1} + T_{s2}}{2}}$$

$\surd$Observación: en este caso, q''_x no es independiente de x.

La pared plana con generación de energía(cont.)

Simetría respecto de un plano central

- Sea $T_{s1} = T_{s2} = T_s$

$$T(x) = \frac{\dot{q}\,L^2}{2k}\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right) + T_s$$

- Temperatura máxima en $x = 0$

$$T(0) = \frac{\dot{q}\,L^2}{2k} + T_s$$

- Dividiendo m.a.m. las expresiones anteriores

$$\frac{T(x) - T_0}{T_s - T_0} = \left(\frac{x}{L}\right)^2$$

La pared plana con generación de energía (cont.)

Para usar estos resultados, hay que conocer T_s. En general, se conoce $T_\infty \longrightarrow$ bce. energía superficial.

$$q''_{cond} = q''_{conv}$$

Se obtiene

$$-k\left.\frac{dT}{dx}\right]_{x=L} = h(T_s - T_\infty)$$

$$\left.\frac{dT}{dx}\right]_{x=L} = \left.\frac{-x\,\dot{q}}{k}\right]_{x=L} = \frac{-L\dot{q}}{k}$$

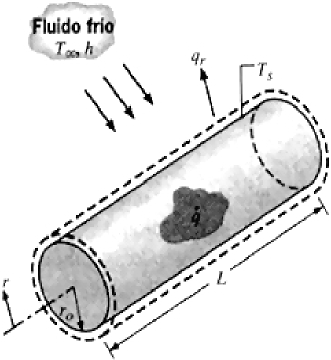
Entonces

$$T_s = T_\infty + \frac{L\dot{q}}{h}$$

$\surd$ Otra forma: bce. de energía total.

$$\dot{E}_g = \dot{E}_s \Longrightarrow \dot{q}\,L = h(T_s - T_\infty)$$

Conducción con generación en sistemas radiales



La ecuación de calor queda ($k = cte.$, est. estac.)

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) + \frac{\dot{q}}{k} = 0$$

Conducción con generación en sistemas radiales

Con condic. de contorno

$$\begin{aligned} \left.\frac{dT}{dr}\right]_{r=0} &= 0 \\ T(r_0) &= T_s \end{aligned}$$

Despejando, se obtiene

$$\begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= T_s + \frac{\dot{q}}{4\,k}\,r_0^2 \end{aligned}$$

Conducción con generación en sistemas radiales

Entonces

$$\boxed{T(r) = \frac{\dot{q}\, r_0^2}{4k}\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) + T_s}$$

Distribución de temperatura en forma adimensional

Evaluando la expresión anterior en $r = 0$, y dividiendo:

$$\frac{T(r) - T_s}{T_0 - T_s} = 1 - \left(\frac{r}{r_0}\right)^2$$

Para relacionar T_s con T_∞, bce. superf. o de energía total.

$$\dot{q}\,\pi\, r_0^2\, L = h(2\,\pi\, r_0\, L)(T_s - T_\infty)$$

$$T_s = T_\infty + \frac{\dot{q}\, r_0}{2\, h}$$