Problemas 1 y 2 - TP Nº2

Ecuación de difusión del calor en coordenadas cilíndricas

Objetivo:

Determinar el campo de temp. en un medio con determinadas condic. en sus límites
$\longmapsto$ *distribución de la temperatura en función de la posición.*

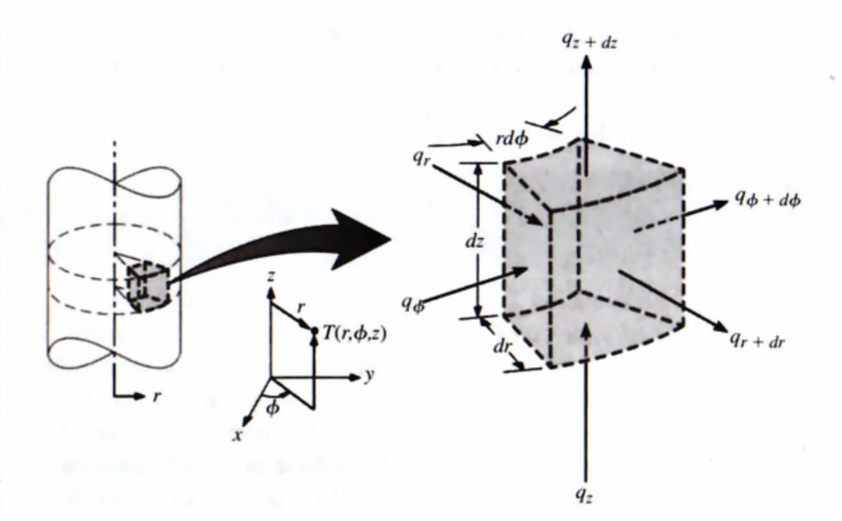
Pasos:

- Definir volumen de control *diferencial*
- Identificar procesos relevantes de transferencia de energía.
- Introducir las ecuaciones de velocidad apropiadas.

$\longmapsto$ ED cuya solución, para cond. de contorno dadas, provee la *distribución de temperatura* en el medio.

Análisis para el volumen de control diferencial

1. Esquema



2. Base de tiempo: instantánea.

3. Procesos relevantes de transferencia de energía

   - Término de entrada

$$\dot{E}_e = q_r + q_\phi + q_z$$

q_r, q_ϕ, q_z: veloc. de transf. por conducción, normales a cada sup. de control.

- Término de salida

$$\dot{E}_s = q_{r+dr} + q_{\phi+d\phi} + q_{z+dz}$$

Aplicando desarrollo de Taylor, despreciando términos de orden sup.

$$q_{r+dr} = q_r + \frac{\partial q_r}{\partial r} dr \quad (1)$$

$$q_{\phi+d\phi} = q_\phi + \frac{1}{r}\frac{\partial q_\phi}{\partial \phi} r\, d\phi \quad (2)$$

$$q_{z+dz} = q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z} dz \quad (3)$$

- Término de generación

$$\dot{E}_g = \dot{q}\, r\, dr\, d\phi\, dz \qquad dV = r\, dr\, d\phi\, dz$$

$\dot{q}$: veloc. de gener. de energía por u. de vol. $[W/m^3]$

- Término de acumulación

$$\dot{E}_a = \rho\, c_p \frac{\partial T}{\partial t} r\, dr\, d\phi\, dz$$

4. Ec. de conservación de la energía, base instantánea.

$$\dot{E}_e + \dot{E}_g - \dot{E}_s = \dot{E}_a \quad (4)$$

Reemplazando en (4) las expresiones de cada término:

$$q_r + q_\phi + q_z + \dot{q}\, r\, dr\, d\phi\, dz - q_{r+dr} - q_{\phi+d\phi} - q_{z+dz} = \rho\, c_p \frac{\partial T}{\partial t} r\, dr\, d\phi\, dz \quad (5)$$

Aplicando las ecuaciones (1), (2), (3)

$$-\frac{\partial q_r}{\partial r} dr - \frac{\partial q_\phi}{\partial \phi} d\phi - \frac{\partial q_z}{\partial z} dz + \dot{q}\, r\, dr\, d\phi\, dz = \rho\, c_p \frac{\partial T}{\partial t} dr\, r\, d\phi\, dz \quad (6)$$

Por la Ley de Fourier,

$$q_r = -k\, r\, d\phi\, dz \frac{\partial T}{\partial r} \quad (7)$$

$$q_z = -k\, r\, d\phi\, dr \frac{\partial T}{\partial z} \quad (8)$$

$$q_\phi = -k\, dr\, dz \frac{\partial T}{\partial \phi}\frac{1}{r} \quad (9)$$

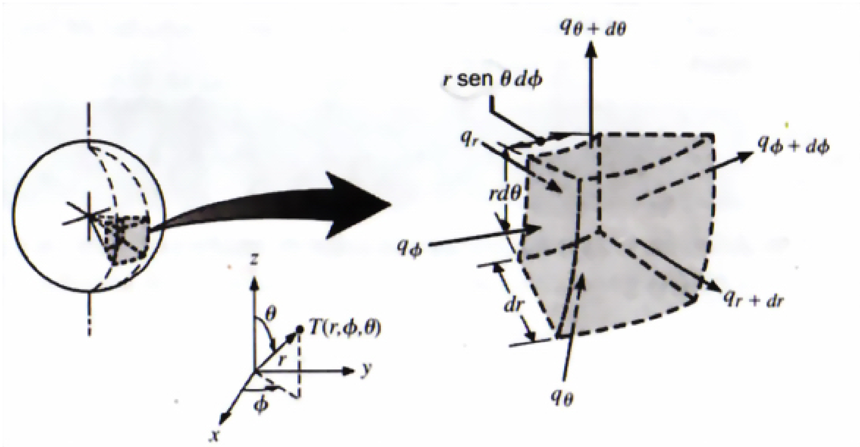
Reemplazando (7), (8) y (9) en (6), dividiendo m.a.m. por $r\, dr\, d\phi\, dz$

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(k\,r\,\frac{\partial T}{\partial r}\right)\;+\;\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(k\,\frac{\partial T}{\partial \phi}\right)\;+\;\frac{\partial}{\partial z}\left(k\,\frac{\partial T}{\partial z}\right)\;+\;\dot{q}\;=\;\rho\,c_p\,\frac{\partial T}{\partial t} \qquad (10)$$

$\mapsto$ Ec. de difusión del calor en coordenadas cilíndricas.

Ecuación de difusión del calor en coordenadas esféricas

1. Esquema



2. Procesos relevantes de transferencia de energía

   - Término de entrada

$$\dot{E}_e = q_r + q_\phi + q_\theta$$

q_r, q_ϕ, q_θ: veloc. de transf. por conducción, normales a cada sup. de control.

   - Término de salida

$$\dot{E}_s = q_{r+dr} + q_{\phi+d\phi} + q_{\theta+d\theta}$$

Aplicando desarrollo de Taylor, despreciando términos de orden sup.

$$q_{r+dr} = q_r + \frac{\partial q_r}{\partial r}\, dr \tag{11}$$

$$q_{\phi+d\phi} = q_\phi + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial q_\phi}{\partial \phi}\, r\sin\theta\, d\phi \tag{12}$$

$$q_{\theta+d\theta} = q_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial q_\theta}{\partial \theta}\, r\, d\theta \tag{13}$$

   - Término de generación

$$\dot{E}_g = \dot{q}\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\phi\, d\theta \qquad dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\phi\, d\theta$$

$\dot{q}$: veloc. de gener. de energía por u. de vol. $[W/m^3]$

   - Término de acumulación

$$\dot{E}_a = \rho\, c_p \frac{\partial T}{\partial t}\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\phi\, d\theta$$

3. Ec. de conservación de la energía, base instantánea.

$$\dot{E}_e \,+\, \dot{E}_g \,-\, \dot{E}_s \,=\, \dot{E}_a \tag{14}$$

Reemplazando en (14) las expresiones de cada término:

$$q_r + q_\phi + q_\theta + \dot{q}\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\phi\, d\theta - q_{r+dr} - q_{\phi+d\phi} - q_{\theta+d\theta} \,=\, \rho\, c_p \,\frac{\partial T}{\partial t}\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\phi\, d\theta \tag{15}$$

Aplicando las ecuaciones (11), (12), (13)

$$-\frac{\partial q_r}{\partial r}\, dr \,-\, \frac{\partial q_\phi}{\partial \phi}\, d\phi \,-\, \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta}\, d\theta \,+\, \dot{q}\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\phi\, d\theta \,=\, \rho\, c_p \,\frac{\partial T}{\partial t}\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\phi\, d\theta \tag{16}$$

Por la Ley de Fourier,

$$q_r \;=\; -\, k\, r^2 \sin\theta\, d\phi\, d\theta \,\frac{\partial T}{\partial r} \tag{17}$$

$$q_\theta \;=\; -\, k\, r \sin\theta\, d\phi\, dr\, \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} \tag{18}$$

$$q_\phi \;=\; -\, k\, r\, dr\, d\theta\, \frac{1}{r \sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \phi} \tag{19}$$

Reemplazando (17), (18) y (19) en (16), dividiendo m.a.m. por $r^2\ \sin\theta\, dr\, d\phi\, d\theta$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(k\, r^2 \frac{\partial T}{\partial r}\right) \,+\, \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(k\, \frac{\partial T}{\partial \phi}\right) \,+\, \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(k \sin\theta \frac{\partial T}{\partial \theta}\right) \,+\, \dot{q} \,=\, \rho\, c_p\, \frac{\partial T}{\partial t} \tag{20}$$

$\mapsto$ Ec. de difusión del calor en coordenadas esféricas.