Procesos y Máquinas Industriales II

Introducción a la convección

Prof. Mariana Suarez

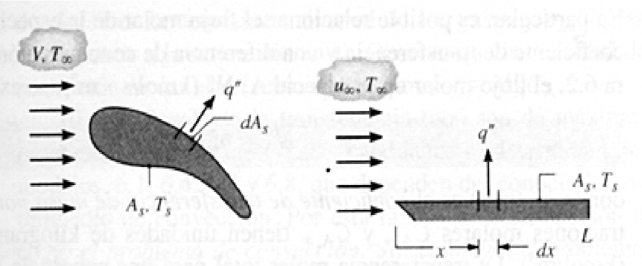
12 de octubre de 2018

Plan de la clase

- Introducción al análisis de la convección
- Capas límite: de velocidad, térmica, de concentración
- Ecuaciones de continuidad y de energía en la capa límite

El problema de transferencia por convección

- Velocidad del fluído: V- Temperatura: T_∞
- Area superficial: A_s- Temperatura: T_s, $T_s \neq T_\infty$



Densidad de flujo de calor local q'' :

$$q'' = h(T_s - T_\infty)$$

donde h es el coeficiente local de convección.
Velocidad de transferencia de calor total q

$$q = \int_{A_s} q'' \, dA_s$$

También puede expresarse:

$$q = (T_s - T_\infty) \int_{A_s} h \, dA_s$$

Definiendo un *coeficiente de convección promedio*, $\bar{h}$, para la superficie total:

$$q = \bar{h} A_s (T_s - T_\infty)$$

Relación entre el coef. local y el coef. promedio:

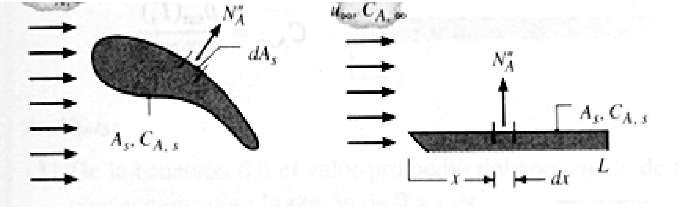
$$\bar{h} = \frac{1}{A_s} \int_{A_s} h \, dA_s$$

Para una placa plana,

$$\bar{h} = \frac{1}{L} \int_0^L h \, dx$$

Analogía con la transferencia de masa por convección

Densidad de flujo molar de la sustancia A:



$$N''_A = h_m(C_{A,s} - C_{A,\infty})$$

donde h_m es el coeficiente de transferencia de masa por convección

Analogía con la transferencia de masa por convección

Velocidad de transferencia molar total

$$N_A = \bar{h}_m A_s (C_{A,s} - C_{A,\infty})$$

Relación entre el coef. local y el coef. promedio:

$$\bar{h}_m = \frac{1}{A_s} \int_{A_s} h_m \, dA_s$$

Para una placa plana,

$$\bar{h}_m = \frac{1}{L} \int_0^L h_m \, dx$$

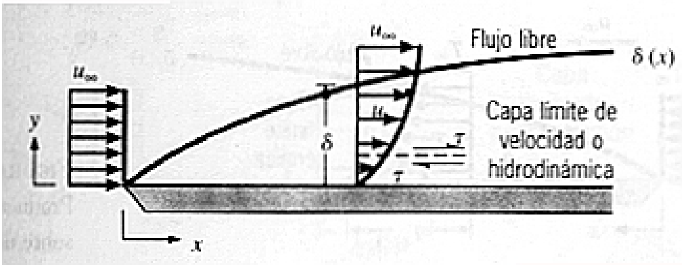
La transferencia de masa también puede expresarse como densidad de flujo másico como sigue.

$$n''_A = h_m (\rho_{A,s} - \rho_{A,\infty})$$

donde $[n''_A] = kg/seg.m^2$

Capas límite de convección

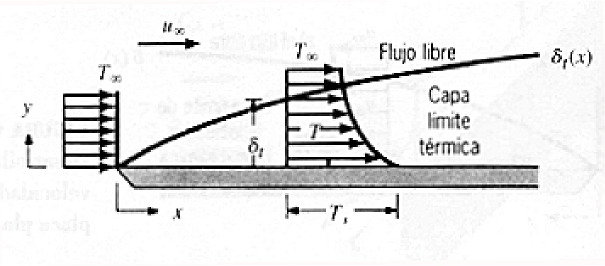
La capa límite de velocidad



Espesor de la capa límite de velocidad (δ)
Es el valor de y para el cual

$$u = 0{,}99\, u_\infty$$

La capa límite térmica

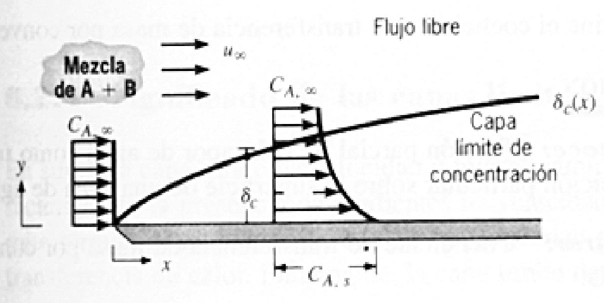


Espesor de la capa límite térmica (δ_t)

Es el valor de y para el cual

$$\frac{T_s - T}{T_s - T_\infty} = 0{,}99$$

La capa límite de concentración

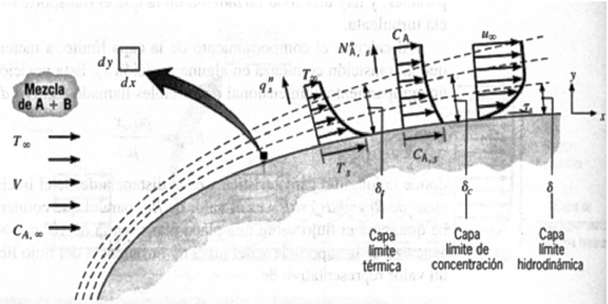


Espesor de la capa límite de concentración (δ_c)
Es el valor de y para el cual

$$\frac{C_{A,s} - C_A}{C_{A,s} - C_{A,\infty}} = 0{,}99$$

Conclusión: Significado de las capas límite

Capa límite	*Caracterización*	*Parámetro*
Velocidad (δ)	grad. de veloc. /tensiones tang.	Coef. fricción C_f
Térmica (δ_t)	grad. de temp. / transf. de calor	Coef. de conv. h
Concentración (δ_c)	grad. de conc. / transf. de masa	Coef.transf. masa

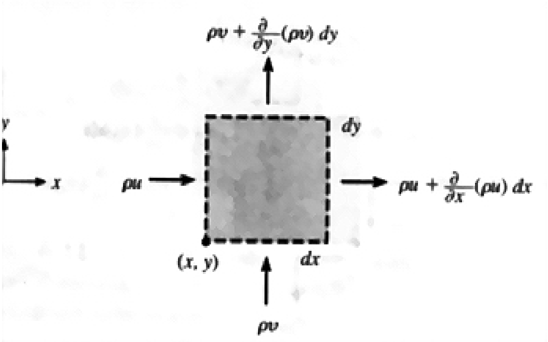


Ecuaciones de transferencia por convección

- Capas límite: velocidad, térmica, concentración
- Fluído: mezcla binaria de las sustancias A y B
- $\delta_t > \delta_c > \delta$ (arbitraria)
- Flujo bidimensional en estado estacionario

Capa límite de velocidad

Ley de conservación de la masa en el VC



✓VC: $dx\,.\,dy\,.\,1\ (dz = 1)$

Conservación de la masa

✓Dirección x:

1. Flujo másico de entrada

$$(\rho\, u)\, dy \quad con\ \rho = \rho_A + \rho_B$$

   u: veloc. másica promedio en la dirección x

2. Flujo másico de salida (en $x + dx$)

$$\left[\rho\, u + \frac{\partial(\rho\, u)}{\partial x}\, dx\right] dy$$

Conservación de la masa

✓Dirección y:

1. Flujo másico de entrada

$$(\rho\, v)\, dx$$

v: veloc. másica promedio en la dirección y

2. Flujo másico de salida (en $y + dy$)

$$\left[\rho\, v + \frac{\partial(\rho\, v)}{\partial y}\, dy\right]\, dx$$

Conservación de la masa

✓Ley de conservación de la masa en estado estacionario:

$$(\rho\, u)\, dy + (\rho\, v)\, dx - \left[\rho\, u + \frac{\partial(\rho\, u)}{\partial x}\, dx\right] dy - \left[\rho\, v + \frac{\partial(\rho\, v)}{\partial y}\, dy\right] dx =$$

Cancelando términos y dividiendo por $dx\, dy$, se obtiene

$$\frac{\partial(\rho\, u)}{\partial x} + \frac{(\partial\rho\, v)}{\partial y} = 0$$

Ecuación de continuidad

Segunda Ley de Newton del movimiento (Teorema del momento)

- Fuerzas proporcionales al volumen (gravitacionales, centrífugas, magnéticas, eléctricas): X e Y, componentes en x y en y de la fuerza de cuerpo por unidad de volumen.
- Fuerzas superficiales (debidas a presión estática del fluído y a tensiones viscosas): F_s
  Tensión viscosa: componente normal σ_{ii}, componente tangencial τ_{ij}

Teorema del momento (Cont.)

Fuerza superficial neta en ambas direcciones:

$$F_{s,x} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right) dx\, dy$$

$$F_{s,y} = \left(\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) dx\, dy$$

Teorema del momento (Cont.)

✓Densidad de flujo de momento en la dirección x

$$\frac{\partial[(\rho u)u]}{\partial x}dx(dy)+\frac{\partial[(\rho v)u]}{\partial y}dy(dx)$$

✓Igualando a la suma de fuerzas en la dirección x

$$\frac{\partial[(\rho u)u]}{\partial x}+\frac{\partial[(\rho v)u]}{\partial y}=\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+X$$

✓Expandiendo derivadas y sustituyendo la ec. de continuidad

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{xx}-p)+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+X$$

Teorema del momento (Cont.)

✓Análogamente, para la dirección y se obtiene

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(\sigma_{yy}-p)+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+Y$$

✓Recordando las ecuaciones de Stokes,

$$\sigma_{xx}=2\mu\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$\sigma_{yy}=2\mu\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

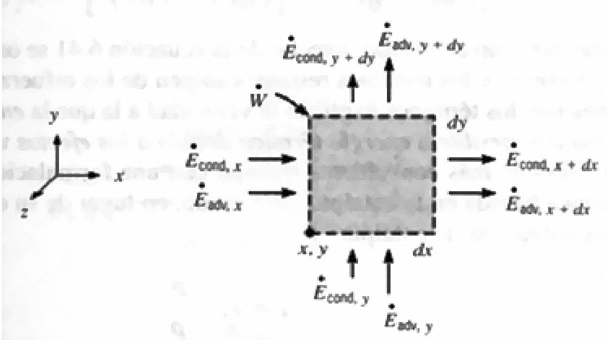
$$\tau_{yx}=\tau_{xy}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

✓Reemplazamos ahora estas últimas en las ecuaciones anteriores y obtenemos

$$
\begin{aligned}
\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right) &= \\
&- \frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[2\mu\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]+X
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right) &= \\
&- \frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left[2\mu\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]+Y
\end{aligned}
$$

Capa límite térmica



<u>Aplicación del balance de energía</u> ✓Energía por u. de masa de fluído

1. Energía interna e
2. Energía cinética $V^2/2$, con $V^2 = u^2 + v^2$

Capa límite térmica

✓Energía de advección E_{adv}: atraviesa la SC con el mov. en masa del fluído.
Flujo neto de entrada al VC de E_{adv} en la dirección x:

$$\dot{E}_{adv,x} - \dot{E}_{adv,x+dx} = \rho u \left(e + \frac{V^2}{2} \right) dy - \\ - \left\{ \rho u \left(e + \frac{V^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] dx \right\} dy = \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho u \left(e + \frac{V^2}{2} \right) \right] dx\, dy$$

Capa límite térmica

✓Energía que atraviesa la SC por procesos moleculares

1. conducción
2. difusión de las sustancias A y B (sólo si hay reacción química)

✓Para conducción, transf. neta de energía en el VC

$$\dot{E}_{cond,x} - \dot{E}_{cond,x+dx} =$$
$$-\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) dy - \left[-k\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) dx\right] dy = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right) dx\, dy$$

Capa límite térmica

✓Trabajo neto en la dirección x

$$\dot{W}_{neto,x} = (X\,u)\,dx\,dy + \frac{\partial}{\partial x}\left[(\sigma_{xx} - p)\,u\right]\,dx\,dy + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}\,u)\,dx\,dy$$

✓Balance de energía total

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho u\left(e + \frac{V^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[\rho v\left(e + \frac{V^2}{2}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial T}{\partial x}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial T}{\partial y}\right) + (X\,u + Y\,v) - \frac{\partial}{\partial x}(pu) - \frac{\partial}{\partial y}(pv) + \frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{xx}u + \tau_{xy}\,v)$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}\,u + \sigma_{yy}\,v) + \dot{q} = 0$$

donde $\dot{q}$ es la tasa de generación de energía por u. de vol.

Ecuación de la energía térmica

Otra forma de la ecuación anterior

$$\rho u \frac{\partial e}{\partial x} + \rho v \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right) - p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \mu \Phi + \dot{q}$$

donde $\mu \Phi$ es la energía de disipación viscosa.
La ecuación puede reacomodarse para dar:

$$\rho u \frac{\partial i}{\partial x} + \rho v \frac{\partial i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \left(u\frac{\partial p}{\partial x} + v\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \mu \Phi + \dot{q}$$

donde $i = e + \frac{p}{\rho}$ es la entalpía del fluído.

Ecuación de la energía térmica

Casos particulares

✓Gas ideal, $di = c_p \, dT$

$$\rho \, c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) =$$
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} \right) + \mu \, \Phi + \dot{q}$$

Ecuación de la energía térmica

✓Fluído incompresible, $c_p = c_v$
✓Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

✓Ecuación de energía

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \Phi + \dot{q}$$

con $de = c_v \, dT = c_p \, dT$