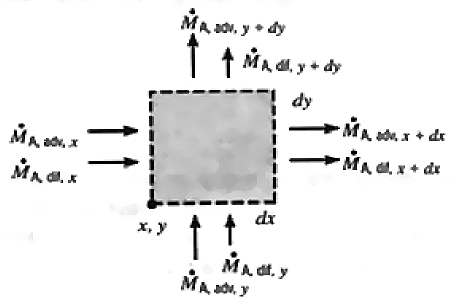
# CLASE XV

## CONVECCIÓN

### Capa límite de concentración




- Transporte de la sustancia A por advección $M_{A,adv}$: atraviesa la SC con la veloc. media de la mezcla. Flujo neto de entrada al VC de $M_{A,adv}$ en la dirección $x$:

$$\dot{M}_{A,adv,x} - \dot{M}_{A,adv,x+dx} = (\rho_A\, u)\, dy - \left(\rho_A\, u + \frac{\partial(\rho_A\, u)}{\partial x}\, dx\right) dy = -\frac{\partial(\rho_A\, u)}{\partial x}\, dx\, dy$$

- Transporte de la sustancia A por difusión
  1. fluído incompresible
  2. Ley de Fick

$$\dot{M}_{A,dif,x} - \dot{M}_{A,dif,x+dx} = \left(-D_{AB}\frac{\partial \rho_A}{\partial x}\right) dy - \left[\left(-D_{AB}\frac{\partial \rho_A}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(-D_{AB}\frac{\partial \rho_A}{\partial x}\right) dx\right] dy = $$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(D_{AB}\frac{\partial \rho_A}{\partial x}\right) dx\, dy$$

- Transporte total de la sustancia A

$$\frac{\partial(\rho_A\, u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_A\, v)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D_{AB}\frac{\partial \rho_A}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_{AB}\frac{\partial \rho_A}{\partial y}\right) + \dot{n}_A$$

  donde $\dot{n}_A$: flujo másico de la sust. A generado por u. de vol. debido a reacción química.

- Desarrollando derivadas y aplicando ec. de continuidad,

$$u\,\frac{\partial \rho_A}{\partial x} + v\,\frac{\partial \rho_A}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D_{AB}\frac{\partial \rho_A}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_{AB}\frac{\partial \rho_A}{\partial y}\right) + \dot{n}_A$$

- En función de concentraciones molares,

$$u\,\frac{\partial C_A}{\partial x} + v\,\frac{\partial C_A}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D_{AB}\frac{\partial C_A}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(D_{AB}\frac{\partial C_A}{\partial y}\right) + \dot{N}_A$$

Aproximaciones y condiciones especiales

Una situación usual:

- Incompresible: $\rho$ constante.
- Propiedades constantes: $\mu$, $k$, etc.
- Fuerzas de cuerpo despreciables: $X = Y = 0$
- No reactivo: $\dot{n}_A = 0$
- Sin generación de energía: $\dot{q} = 0$

Otras aproximaciones (*aproximaciones de capa límite*)

Dado que $\delta$ , $\delta_t$ , $\delta_c$ son en general pequeños:

- Capa límite de velocidad

$$u >> \upsilon$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} >> \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial \upsilon}{\partial y}, \frac{\partial \upsilon}{\partial x}$$

- Capa límite térmica

$$\frac{\partial T}{\partial y} >> \frac{\partial T}{\partial x}$$

- Capa límite de concentración

$$\frac{\partial C_A}{\partial y} >> \frac{\partial C_A}{\partial x}$$

Las ecuaciones anteriores quedan:

- Ec. de continuidad total

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

- Ec. de momento en $x$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \upsilon \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{2}$$

- Ec. de momento en $y$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \tag{3}$$

- Ecuación de energía

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + \upsilon \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\nu}{c_p}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \tag{4}$$

- Ecuación de continuidad para la sustancia $A$

$$u \frac{\partial C_A}{\partial x} + \upsilon \frac{\partial C_A}{\partial y} = D_{AB} \frac{\partial^2 C_A}{\partial y^2} \tag{5}$$

Parámetros de similaridad en la capa límite

- Variables independientes adimensionales

$$x^* = \frac{x}{L} \text{ y } y^* = \frac{y}{L}$$

  donde $L$ es una longitud caracteristica.

- $u^* = \frac{u}{V}, \upsilon^* = \frac{\upsilon}{V}$

  donde $V$ es la velocidad por sobre la superficie.

- $T^* = \frac{T - T_S}{T_\infty - T_S}, C_A^* = \frac{C_A - C_{A,S}}{C_{A,\infty} - C_{A,S}}$

- presión adimensional

$$p^* = \frac{p}{\rho V^2}$$

**Números adimensionales**

- Número de Reynolds

  $Re_L = \frac{V\,L}{\nu}$

- Número de Prandtl

  $Pr = \frac{\nu}{\alpha}$

- Número de Schmidt

  $Sc = \frac{\nu}{D_{AB}}$

**Ecuaciones de la capa límite adimensionalizadas**

Con las consideraciones anteriores se obtienen las expresiones adimensionalizadas de las ecuaciones (1), (2), (4), (5) como sigue.

- Ec. de continuidad total

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \upsilon^*}{\partial y^*} = 0 \tag{6}$$

- Ec. de momento en $x$

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \upsilon^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re_L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \tag{7}$$

- Ecuación de energía

$$u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + \upsilon^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Re_L\, Pr} \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \tag{8}$$

- Ecuación de continuidad para la sustancia $A$

$$u^* \frac{\partial C_A^*}{\partial x^*} + \upsilon^* \frac{\partial C_A^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Re_L\, Sc} \frac{\partial^2 C_A^*}{\partial y^{*2}} \tag{9}$$

### Formas funcionales de las soluciones adimensionales y obtención de los coeficientes $C_f$, $h$, $h_m$

La solución de la ecuación (7) tiene la forma que sigue.

$$u^* \;=\; f_1\left(x^*,\, y^*,\, Re_L,\, \frac{\partial p^*}{\partial x^*}\right) \tag{10}$$

donde $\frac{\partial p^*}{\partial x^*}$ depende de la geometría de la superficie.

1. Obtención del coeficiente de fricción $C_f$

   Sabemos que

$$C_f \;=\; \frac{2\,\tau_s}{\rho\,V^2} \tag{11}$$

$$\tau_s \;=\; \mu\;\frac{\partial u}{\partial y}\bigg]_{y=0} \;=\; \mu\,\frac{V}{L}\;\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\bigg]_{y^*=0} \tag{12}$$

$$Re_L \;=\; \frac{V\,L\,\rho}{\mu} \tag{13}$$

   Reemplazando (13) y (12) en (11) se obtiene:

$$C_f \;=\; \frac{2}{Re_L}\;\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\bigg]_{y^*=0} \tag{14}$$

   y considerando (10), $\frac{\partial u^*}{\partial y^*}\Big]_{y^*=0} \;=\; f_2\left(x^*,\, Re_L,\, \frac{\partial p^*}{\partial x^*}\right)$ se llega a

$$C_f \;=\; \frac{2}{Re_L}\,f_2\,(x^*,\, Re_L) \tag{15}$$

   para determinada geometría.

2. Obtención del coeficiente de convección $h$

   En el caso más general, se tiene que $h = f(\rho,\, k,\, c_p,\, \mu,\, V,\, L,\,$ geom. de la sup.$)$.
   La solución de la ecuación (8) es de la forma:

$$T^* \;=\; f_3\left(x^*,\, y^*,\, Re_L,\, Pr,\, \frac{\partial p^*}{\partial x^*}\right) \tag{16}$$

   De las definiciones de $T^*$ e $y^*$ se tiene que

$$\frac{\partial T}{\partial y} \;=\; \frac{T_\infty - T_s}{L}\,\frac{\partial T^*}{\partial y^*}$$

   Recordando la definición del coeficiente de convección $h$ se llega a

$$h \;=\; -\frac{k_f}{L}\,\frac{(T_\infty - T_s)}{(T_s - T_\infty)}\;\frac{\partial T^*}{\partial y^*}\bigg]_{y^*=0} \;=\; \frac{k_f}{L}\;\frac{\partial T^*}{\partial y^*}\bigg]_{y^*=0} \tag{17}$$

   Definimos el número de Nusselt:

$$Nu \;=\; \frac{h\,L}{k_f} \;=\; \frac{\partial T^*}{\partial y^*}\bigg]_{y^*=0}$$

Para una determinada geometría superficial, $Nu = f_4(x^*, Re_L, Pr)$. Conocido $Nu$, se puede calcular por (17) el coeficiente de convección $h$ local.
Para obtener $\overline{h}$ se integra sobre la superficie, siendo el número de Nusselt promedio:

$$\overline{Nu} = \frac{\overline{h}\,L}{k_f} = f_5(Re_L, Pr)$$

3. Obtención del coeficiente de convección másico $h_m$

La solución de la ecuación (9) es de la forma:

$$C_A^* = f_6\left(x^*, y^*, Re_L, Sc, \frac{\partial p^*}{\partial x^*}\right)$$

Recordando la definición del coeficiente $h_m$, se tiene

$$h_m = \frac{D_{AB}}{L}\left.\frac{\partial C_A^*}{\partial y^*}\right]_{y^*=0}$$

Definimos ahora el número de Sherwood:

$$Sh = \frac{h_m\,L}{D_{AB}} = \left.\frac{\partial C_A^*}{\partial y^*}\right]_{y^*=0}$$

Para una geometría definida,

$$Sh = f_7(x^*, Re_L, Sc)$$

Análogamente con el caso anterior, para obtener $\overline{h}_m$ se integra sobre la superficie, siendo

$$\overline{Sh} = \frac{\overline{h}_m\,L}{D_{AB}} = f_8(Re_L, Sc)$$

**Síntesis de las ecuaciones adimensionales**

**312** **Capítulo 6 ▪ *Introducción a la convección***

**TABLA 6.1** Ecuaciones de transferencia por convección y condiciones de frontera en forma adimensional

| Capa límite | Ecuación de conservación | Ecuaciones de frontera: Pared | Ecuaciones de frontera: Corriente libre | Parámetros de similitud |
|---|---|---|---|---|
| Velocidad | $u^*\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{dp^*}{dx^*} + \frac{\nu}{VL}\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$ (6.63) | $u^*(x^*, 0) = 0$ <br> $v^*(x^*, 0) = 0$ | $u^*(x^*, \infty) = \frac{u_\infty(x^*)}{V}$ (6.66) | $Re_L$ |
| Térmica | $u^*\frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{\alpha}{VL}\frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}}$ (6.64) | $T^*(x^*, 0) = 0$ | $T^*(x^*, \infty) = 1$ (6.67) | $Re_L, Pr$ |
| Concentración | $u^*\frac{\partial C_A^*}{\partial x^*} + v^*\frac{\partial C_A^*}{\partial y^*} = \frac{D_{AB}}{VL}\frac{\partial^2 C_A^*}{\partial y^{*2}}$ (6.65) | $C_A^*(x^*, 0) = 0$ | $C_A^*(x^*, \infty) = 1$ (6.68) | $Re_L, Sc$ |